MAT 122 — Álgebra Linear – Prova 1

Prof. Paolo Piccione

18 de outubro de 2018

Nome: ____

Número USP: ____

Assinatura: ____

Instruções

- A duração da prova é de **uma hora e quarenta minutos**.
- Assinale as alternativas corretas na **folha de respostas** que está no final da prova. *É permitido deixar questões em branco.*
- Cada questão tem apenas **uma resposta correta**.
- O valor total da prova é de **10** pontos; cada questão correta vale $\mathbf{\frac{1}{2}}$ ponto (0.5) e *cada questão errada implica num desconto de* $\mathbf{\frac{1}{10}}$ *de ponto* (0.10).
- No final da prova, deve ser entregue apenas a folha de respostas (na última página).
- **Boa Prova!**

Terminologia e Notações Utilizadas na Prova

- Todos os espaços vetorias nesta prova são *reais*, ou seja, seu corpo de escalares é $\mathbb{R}$. Os espaços podem ter dimensão finita ou não.
- Data uma transformação linear $T\colon V \to W$ entre espaços vetoriais, $\boxed{\mathrm{Ker}(T)}$ denota o núcleo de T e $\boxed{\mathrm{Im}(T)}$ a imagem de T.
- Para todo inteiro positivo n, o símbulo $\mathbb{R}^n$ denota o espaço vetorial
$$\big\{(x_1, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{R},\ \forall\, i = 1, \ldots, n\big\}.$$
- O símbulo $\mathcal{P}_n$ denote o espaço de todos os polinômios com coeficientes reais de grau menor ou igual a n. Se $p \in \mathcal{P}_n$, i.e.,
$$p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n,$$
então p' denota sua derivada: $p'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + n a_n x^{n-1}$. Analogamente, p'' denota a derivada segunda de p.

NÃO ESQUEÇA DE POR SEU NOME
NA FOLHA DE RESPOSTAS!!!

$\boxed{\mathbf{D}}$

Questão 1. *Seja V um espaço vetorial de dimensão 3. Quais das afirmações a seguir são verdadeiras?*

(I) *Qualquer conjunto linearmente independente formado por três vetores de V é uma base de V.*
(II) *Qualquer conjunto linearmente independente pode ter no máximo três vetores.*
(III) *Qualquer conjunto formado por três vetores de V é linearmente independente.*

(a) verdadeiras apenas a (I) e a (III);
(b) verdadeira apenas a (I);
(c) verdadeiras apenas a (I) e a (II);
(d) todas verdadeiras;
(e) verdadeiras apenas a (II) e a (III).

Questão 2. *Calcule a matriz A^{-1} inversa da matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$*

(a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$;

(b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$;

(c) $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$;

(d) A não é inversível;

(e) $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$.

Questão 3. *Sejam V e W dois espaços vetoriais, e $T\colon V \to W$ uma transformação linear. Seja b um vetor tal que a equação $T(x) = b$ admite pelo menos uma solução. Em quais dos seguintes casos a solução desta equação é única?*

(a) se $b \in \operatorname{Ker}(T)$;
(b) se $\operatorname{Ker}(T) = \{0\}$;
(c) se $b \in \operatorname{Im}(T)$;
(d) se $\operatorname{Im}(T) = W$;
(e) se $x \in \operatorname{Im}(T)$.

Questão 4. *Sejam V e W dois espaços vetoriais, e $T\colon V \to W$ uma transformação linear. Quais das seguintes afirmações é sempre verdadeira?*

(a) $\dim\big(\operatorname{Ker}(T)\big) \geq \dim(W) - \dim(V)$;
(b) $\dim(V) + \dim(W) = \dim\big(\operatorname{Ker}(T)\big)$;
(c) $\dim(W) \geq \dim(V) - \dim\big(\operatorname{Ker}(T)\big)$;
(d) $\dim(V) - \dim(W) \leq -\dim\big(\operatorname{Ker}(T)\big)$;
(e) $\dim\big(\operatorname{Ker}(T)\big) = \dim(W)$.

Questão 5. *Determine a dimensão do espaço vetorial V de todos os polinômios da forma $p(x) = a_0 + a_2x^2 + a_4x^4$, com $a_0, a_2, a_4 \in \mathbb{R}$.*

(a) $\dim(V) = a_0 + a_2 + a_4$;
(b) $\dim(V) = 4$;
(c) $\dim(V) = 3$;
(d) $\dim(V) = 5$;
(e) V tem dimensão infinita.

Questão 6. *Sejam V e W espaços vetoriais, $T\colon V \to W$ uma transformaçõ linear, e $\{v_1, \ldots, v_n\}$ uma família de vetores de V. Se a família de vetores $\big\{T(v_1), \ldots, T(v_n)\big\}$ é linearmente independente, o que podemos concluir?*

(a) a família $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é linearmente dependente;
(b) $\big\{T(v_1), \ldots, T(v_n)\big\}$ é uma base de W;
(c) a família $\{v_1, \ldots, v_n\}$ gera V;
(d) a família $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é linearmente independente;
(e) os vetores $T(v_1), \ldots, T(v_n)$ são combinações lineares de $v_1, \ldots, v_n$.

Questão 7. *Sejam V e W dois espaços vetoriais, e $T\colon V \to W$ uma transformação linear. Qual é o enunciado correto do Teorema do Núcleo e da Imágem?*

(a) $\dim\big(\ker(T)\big) + \dim\big(\mathrm{Im}(T)\big) = \dim(V) - \dim(W)$;

(b) $\dim\big(\ker(T)\big) + \dim\big(\mathrm{Im}(T)\big) = \dim(V)$;

(c) $\dim\big(\ker(T)\big) - \dim\big(\mathrm{Im}(T)\big) = \dim(W)$;

(d) $\dim\big(\ker(T)\big) - \dim\big(\mathrm{Im}(T)\big) = \dim(V)$;

(e) $\dim\big(\ker(T)\big) + \dim\big(\mathrm{Im}(T)\big) = \dim(W)$.

Questão 8. *Determinar todas as soluções do sistema linear não homogêneo:*

$$\begin{cases} 4x + 5y = 1 \\ 12x + 15y = 0. \end{cases}$$

(a) $x = 1$, $y = -1$ e $x = y = 0$;

(b) $x = y = t$, com $t \in \mathbb{R}$;

(c) $x = 1$, $y = -1$;

(d) o sistema não admite soluções;

(e) $x = y = 0$.

Questão 9. *Sejam V e W dois espaços vetoriais, e $T\colon V \to W$ uma transformação linear. Para quais vetores b a equação $T(x) = b$ admite pelo menos uma solução?*

(a) para $b \in \mathrm{Ker}(T)$;

(b) para todo $b \in W$;

(c) para $b \in \mathrm{Im}(T)$;

(d) para $b \in \mathrm{Im}(T) \cap \mathrm{Ker}(T)$;

(e) para todo $b \in V$.

Questão 10. *Sejam U e V subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^5$. Quais das seguintes afirmações é verdadeira?*

(I) $\dim(U + V) \leq 5$;
(II) $\dim(U \cap V) \leq 5$;
(III) $\dim(U) \leq \dim(U + V)$.

(a) somente a (I) e (II) são verdadeiras ;

(b) somente a (I) e (III) são verdadeiras;

(c) nenhuma das afirimações é verdadeira;

(d) somente a (I) é verdadeira;

(e) todas as afirmações são verdadeiras.

Questão 11. *Dado o sistema de equações lineares:*

$$\begin{cases} x + y + z = c_1, \\ 2x + 2y - z = c_2, \\ 4x + 4y + 5z = c_3, \end{cases}$$

determine para quais $c = (c_1, c_2, c_3)$ *existem soluções.*

(a) $2c_1 + c_2 + c_3 = 0$;
(b) $c_1 + 2c_2 - c_3 = 0$;
(c) para todo $c \in \mathbb{R}^3$;
(d) somente para $c = (0, 0, 0)$;
(e) $c_3 - 2c_1 - c_2 = 0$.

Questão 12. *Seja* V *um espaço vetorial, e* $\{v_1, v_2, \ldots, v_{14}, v_{15}\}$ *uma família de vetores de* V *que geram* V*. O que podemos afirmar sobre a dimensão de* V*?*

(a) $\dim(V) \geq 15$;
(b) $\dim(V) = 15$;
(c) $7 \leq \dim(V) \leq 8$;
(d) $\dim(V) \leq 15$;
(e) $\dim(V) \geq 30$.

Questão 13. *Considere a transformação linear*[1] $T \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *definida por:*

$$T(x, y, z) = (x + 2y - z, 2x + 4y - 2z, -x - 2y + z).$$

Determine uma base de $\operatorname{Im}(T)$*.*

(a) $\{(1, 2, 1)\}$;
(b) $\{(2, -1, 0), (1, 0, 1)\}$;
(c) $\{(2, 1, 0), (1, 0, 1)\}$;
(d) $\{(1, 2, -1)\}$;
(e) $\{(1, -2, -1)\}$.

Questão 14. *Determine as soluções do sistema linear não homogêneo:*

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ 2x + z = 1, \\ x + 2y + 2z = -1. \end{cases}$$

(a) $(x, y, z) = (t, 0, -t)$, com $t \in \mathbb{R}$;
(b) o sistema não admite soluções;
(c) $(x, y, z) = (-t, 1 + t, t)$, com $t \in \mathbb{R}$;
(d) $(x, y, z) = (t, 1 - t, -t)$, com $t \in \mathbb{R}$;
(e) $(x, y, z) = (1, 0, -1)$.

[1] É a mesma da Questão 16!

Questão 15. *Seja* $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *uma transformação linear tal que:*

$$T(1,1) = (2,1,0) \quad \textbf{\textit{e}} \quad T(2,3) = (1,-1,1).$$

Calcule $T(0,-1)$.

(a) $T(0,-1) = (3,3,1)$;
(b) $T(0,-1) = (3,-3,1)$;
(c) $T(0,-1) = (-3,3,-1)$;
(d) $T(0,-1) = (0,0,0)$;
(e) $T(0,-1) = (3,3,-1)$.

Questão 16. *Considere a transformação linear*[2] $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *definida por:*

$$T(x,y,z) = (x+2y-z, 2x+4y-2z, -x-2y+z).$$

Determine uma base de $\operatorname{Ker}(T)$.

(a) $\{(2,-1,0),(1,0,1)\}$;
(b) $\{(2,1,0),(1,0,1)\}$;
(c) $\{(1,-2,-1)\}$;
(d) $\{(2,-1,0),(1,1,1)\}$;
(e) $\{(1,2,-1)\}$.

Questão 17. *Calcule o produto linhas por colunas* $A \times B$ *das matrices* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ *e* $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(a) $A \times B = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$;

(b) $A \times B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$;

(c) $A \times B = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ -1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$;

(d) $A \times B = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$;

(e) $A \times B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

[2]É a mesma da Questão 13!

Questão 18. *Calcule a dimensão e uma base $\mathcal{B}$ do seguinte espaço vetorial:*

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - 2z = 0\}.$$

(a) $\dim(V) = 3$, $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1), (1, -1, 0), (0, 2, 1)\}$;
(b) $\dim(V) = 1$, $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1)\}$;
(c) $\dim(V) = 2$, $\mathcal{B} = \{(1, -1, 0), (0, -2, 1)\}$;
(d) $\dim(V) = 2$, $\mathcal{B} = \{(1, -1, 0), (0, 2, 1)\}$;
(e) $\dim(V) = 2$, $\mathcal{B} = \{(1, 1, 0), (0, 2, 1)\}$.

Questão 19. (Leia as instruções na primeira página para lembrar as notações utilizadas no espaço vetorial de polinômios com coeficientes reais.) *Considere o operador linear $T \colon \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3$ dado por:*

$$T(p) = p' - p''.$$

Determine o núcleo de T.

(a) $\mathrm{Ker}(T) = \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 : a_1 = a_2 = a_3 = 0\}$;
(b) $\mathrm{Ker}(T) = \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 : a_0 = a_1 = 0\}$;
(c) $\mathrm{Ker}(T) = \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 : a_1 = 2a_2 = 6a_3\}$;
(d) $\mathrm{Ker}(T) = \{0\}$;
(e) $\mathrm{Ker}(T) = \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 : a_1 = a_2 = a_3 = 0\}$.

Questão 20. *Dado a conjunto $S = \{(1, 0, 1), (0, 1, a), (1, 1, b), (1, 1, 1)\}$, determine os valores de a e b tais que S* ***não gera*** *todo o espaço $\mathbb{R}^3$.*

(a) S gera $\mathbb{R}^3$ para todos os valores de a e b;
(b) $a = 1$, $b = 0$;
(c) $a = 0$, $b = 1$;
(d) $a = b = 0$;
(e) $a = b = 1$.

MAT 122 — Álgebra Linear
Prof. Paolo Piccione
Prova 1
18 de outubro de 2018

Nome: ____

Número USP: ______________________________________

Assinatura: _______________________________________

Folha de Respostas $\boxed{\text{D}}$

1	a	b	c	d	e
2	a	b	c	d	e
3	a	b	c	d	e
4	a	b	c	d	e
5	a	b	c	d	e
6	a	b	c	d	e
7	a	b	c	d	e
8	a	b	c	d	e
9	a	b	c	d	e
10	a	b	c	d	e
11	a	b	c	d	e
12	a	b	c	d	e
13	a	b	c	d	e
14	a	b	c	d	e
15	a	b	c	d	e
16	a	b	c	d	e
17	a	b	c	d	e
18	a	b	c	d	e
19	a	b	c	d	e
20	a	b	c	d	e

Deixe em branco.

Corretas	**Erradas**	**Nota**