

# MAT 122 — Álgebra Linear – Prova 1

Prof. Paolo Piccione

18 de outubro de 2018

Nome: \_\_\_\_\_

Número USP: \_\_\_\_\_

Assinatura: \_\_\_\_\_

## Instruções

- A duração da prova é de **uma hora e quarenta minutos**.
- Assinale as alternativas corretas na **folha de respostas** que está no final da prova. *É permitido deixar questões em branco.*
- Cada questão tem apenas **uma resposta correta**.
- O valor total da prova é de **10** pontos; cada questão correta vale  $\frac{1}{2}$  ponto (0.5) e *cada questão errada implica num desconto de  $\frac{1}{10}$  de ponto* (0.10).
- No final da prova, deve ser entregue apenas a folha de respostas (na última página).
- **Boa Prova!**

## Terminologia e Notações Utilizadas na Prova

- Todos os espaços vetoriais nesta prova são *reais*, ou seja, seu corpo de escalares é  $\mathbb{R}$ . Os espaços podem ter dimensão finita ou não.
- Data uma transformação linear  $T: V \rightarrow W$  entre espaços vetoriais,  $\boxed{\text{Ker}(T)}$  denota o núcleo de  $T$  e  $\boxed{\text{Im}(T)}$  a imagem de  $T$ .
- Para todo inteiro positivo  $n$ , o símbolo  $\mathbb{R}^n$  denota o espaço vetorial

$$\{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, \forall i = 1, \dots, n\}.$$

- O símbolo  $\mathcal{P}_n$  denote o espaço de todos os polinômios com coeficientes reais de grau menor ou igual a  $n$ . Se  $p \in \mathcal{P}_n$ , i.e.,

$$p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n,$$

então  $p'$  denota sua derivada:  $p'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + na_nx^{n-1}$ . Analogamente,  $p''$  denota a derivada segunda de  $p$ .

**NÃO ESQUEÇA DE POR SEU NOME  
NA FOLHA DE RESPOSTAS!!!**

**C**

**Questão 1.** *Determine as soluções do sistema linear não homogêneo:*

$$\begin{cases} x + y & = 1, \\ 2x & + z = 1, \\ x + 2y + 2z & = -1. \end{cases}$$

- (a)  $(x, y, z) = (t, 1 - t, -t)$ , com  $t \in \mathbb{R}$ ;
- (b)  $(x, y, z) = (-t, 1 + t, t)$ , com  $t \in \mathbb{R}$ ;
- (c)  $(x, y, z) = (t, 0, -t)$ , com  $t \in \mathbb{R}$ ;
- (d)  $(x, y, z) = (1, 0, -1)$ ;
- (e) o sistema não admite soluções.

**Questão 2.** *Sejam  $V$  e  $W$  dois espaços vetoriais, e  $T: V \rightarrow W$  uma transformação linear. Quais das seguintes afirmações é sempre verdadeira?*

- (a)  $\dim(W) \geq \dim(V) - \dim(\text{Ker}(T))$ ;
- (b)  $\dim(V) - \dim(W) \leq -\dim(\text{Ker}(T))$ ;
- (c)  $\dim(\text{Ker}(T)) = \dim(W)$ ;
- (d)  $\dim(V) + \dim(W) = \dim(\text{Ker}(T))$ ;
- (e)  $\dim(\text{Ker}(T)) \geq \dim(W) - \dim(V)$ .

**Questão 3.** *Seja  $V$  um espaço vetorial, e  $\{v_1, v_2, \dots, v_{14}, v_{15}\}$  uma família de vetores de  $V$  que geram  $V$ . O que podemos afirmar sobre a dimensão de  $V$ ?*

- (a)  $7 \leq \dim(V) \leq 8$ ;
- (b)  $\dim(V) = 15$ ;
- (c)  $\dim(V) \geq 15$ ;
- (d)  $\dim(V) \geq 30$ ;
- (e)  $\dim(V) \leq 15$ .

**Questão 4.** *Dado a conjunto  $S = \{(1, 0, 1), (0, 1, a), (1, 1, b), (1, 1, 1)\}$ , determine os valores de  $a$  e  $b$  tais que  $S$  **não gera** todo o espaço  $\mathbb{R}^3$ .*

- (a)  $a = b = 0$ ;
- (b)  $a = 0, b = 1$ ;
- (c)  $a = b = 1$ ;
- (d)  $a = 1, b = 0$ ;
- (e)  $S$  gera  $\mathbb{R}^3$  para todos os valores de  $a$  e  $b$ .

**Questão 5.** Calcule o produto linhas por colunas  $A \times B$  das matrizes  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$  e  $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(a)  $A \times B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ;

(b)  $A \times B = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ ;

(c)  $A \times B = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ ;

(d)  $A \times B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ;

(e)  $A \times B = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ -1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ .

**Questão 6.** Sejam  $V$  e  $W$  dois espaços vetoriais, e  $T: V \rightarrow W$  uma transformação linear. Qual é o enunciado correto do Teorema do Núcleo e da Imagem?

(a)  $\dim(\ker(T)) + \dim(\text{Im}(T)) = \dim(W)$ ;

(b)  $\dim(\ker(T)) - \dim(\text{Im}(T)) = \dim(W)$ ;

(c)  $\dim(\ker(T)) + \dim(\text{Im}(T)) = \dim(V)$ ;

(d)  $\dim(\ker(T)) + \dim(\text{Im}(T)) = \dim(V) - \dim(W)$ ;

(e)  $\dim(\ker(T)) - \dim(\text{Im}(T)) = \dim(V)$ .

**Questão 7.** Seja  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma transformação linear tal que:

$$T(1, 1) = (2, 1, 0) \quad \text{e} \quad T(2, 3) = (1, -1, 1).$$

Calcule  $T(0, -1)$ .

(a)  $T(0, -1) = (3, 3, 1)$ ;

(b)  $T(0, -1) = (3, -3, 1)$ ;

(c)  $T(0, -1) = (3, 3, -1)$ ;

(d)  $T(0, -1) = (0, 0, 0)$ ;

(e)  $T(0, -1) = (-3, 3, -1)$ .

**Questão 8.** Determinar todas as soluções do sistema linear não homogêneo:

$$\begin{cases} 4x + 5y = 1 \\ 12x + 15y = 0. \end{cases}$$

- (a)  $x = y = 0$ ;
- (b) o sistema não admite soluções;
- (c)  $x = 1, y = -1$ ;
- (d)  $x = y = t$ , com  $t \in \mathbb{R}$ ;
- (e)  $x = 1, y = -1$  e  $x = y = 0$ .

**Questão 9.** Calcule a matriz  $A^{-1}$  inversa da matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(a)  $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix};$

(b)  $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix};$

(c)  $A$  não é inversível;

(d)  $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix};$

(e)  $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}.$

**Questão 10.** *Sejam  $V$  e  $W$  espaços vetoriais,  $T: V \rightarrow W$  uma transformação linear, e  $\{v_1, \dots, v_n\}$  uma família de vetores de  $V$ . Se a família de vetores  $\{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$  é linearmente independente, o que podemos concluir?*

- (a) os vetores  $T(v_1), \dots, T(v_n)$  são combinações lineares de  $v_1, \dots, v_n$ ;
- (b) a família  $\{v_1, \dots, v_n\}$  gera  $V$ ;
- (c) a família  $\{v_1, \dots, v_n\}$  é linearmente dependente;
- (d)  $\{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$  é uma base de  $W$ ;
- (e) a família  $\{v_1, \dots, v_n\}$  é linearmente independente.

**Questão 11.** *Sejam  $V$  e  $W$  dois espaços vetoriais, e  $T: V \rightarrow W$  uma transformação linear. Para quais vetores  $b$  a equação  $T(x) = b$  admite pelo menos uma solução?*

- (a) para  $b \in \text{Im}(T)$ ;
- (b) para  $b \in \text{Im}(T) \cap \text{Ker}(T)$ ;
- (c) para  $b \in \text{Ker}(T)$ ;
- (d) para todo  $b \in V$ ;
- (e) para todo  $b \in W$ .

**Questão 12.** *Seja  $V$  um espaço vetorial de dimensão 3. Quais das afirmações a seguir são verdadeiras?*

- (I) *Qualquer conjunto linearmente independente formado por três vetores de  $V$  é uma base de  $V$ .*
  - (II) *Qualquer conjunto linearmente independente pode ter no máximo três vetores.*
  - (III) *Qualquer conjunto formado por três vetores de  $V$  é linearmente independente.*
- (a) verdadeiras apenas a (I) e a (II);
  - (b) todas verdadeiras;
  - (c) verdadeiras apenas a (I) e a (III);
  - (d) verdadeiras apenas a (II) e a (III);
  - (e) verdadeira apenas a (I).

**Questão 13.** (Leia as instruções na primeira página para lembrar as notações utilizadas no espaço vetorial de polinômios com coeficientes reais.)

Considere o operador linear  $T: \mathcal{P}_3 \rightarrow \mathcal{P}_3$  dado por:

$$T(p) = p' - p''.$$

Determine o núcleo de  $T$ .

- (a)  $\text{Ker}(T) = \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 : a_1 = a_2 = a_3 = 0\}$ ;
- (b)  $\text{Ker}(T) = \{0\}$ ;
- (c)  $\text{Ker}(T) = \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 : a_1 = 2a_2 = 6a_3\}$ ;
- (d)  $\text{Ker}(T) = \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 : a_0 = a_1 = 0\}$ ;
- (e)  $\text{Ker}(T) = \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 : a_1 = a_2 = a_3 = 0\}$ .

**Questão 14.** Dado o sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} x + y + z = c_1, \\ 2x + 2y - z = c_2, \\ 4x + 4y + 5z = c_3, \end{cases}$$

determine para quais  $c = (c_1, c_2, c_3)$  existem soluções.

- (a)  $c_3 - 2c_1 - c_2 = 0$ ;
- (b) para todo  $c \in \mathbb{R}^3$ ;
- (c)  $c_1 + 2c_2 - c_3 = 0$ ;
- (d)  $2c_1 + c_2 + c_3 = 0$ ;
- (e) somente para  $c = (0, 0, 0)$ .

**Questão 15.** Considere a transformação linear<sup>1</sup>  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por:

$$T(x, y, z) = (x + 2y - z, 2x + 4y - 2z, -x - 2y + z).$$

Determine uma base de  $\text{Im}(T)$ .

- (a)  $\{(1, -2, -1)\}$ ;
- (b)  $\{(1, 2, 1)\}$ ;
- (c)  $\{(2, 1, 0), (1, 0, 1)\}$ ;
- (d)  $\{(1, 2, -1)\}$ ;
- (e)  $\{(2, -1, 0), (1, 0, 1)\}$ .

---

<sup>1</sup>É a mesma da Questão 18!

**Questão 16.** *Sejam  $U$  e  $V$  subespaços vetoriais de  $\mathbb{R}^5$ . Quais das seguintes afirmações é verdadeira?*

- (I)  $\dim(U + V) \leq 5$ ;
- (II)  $\dim(U \cap V) \leq 5$ ;
- (III)  $\dim(U) \leq \dim(U + V)$ .

- (a) somente a (I) é verdadeira;
- (b) nenhuma das afirmações é verdadeira;
- (c) somente a (I) e (II) são verdadeiras ;
- (d) somente a (I) e (III) são verdadeiras;
- (e) todas as afirmações são verdadeiras.

**Questão 17.** *Determine a dimensão do espaço vetorial  $V$  de todos os polinômios da forma  $p(x) = a_0 + a_2x^2 + a_4x^4$ , com  $a_0, a_2, a_4 \in \mathbb{R}$ .*

- (a)  $\dim(V) = 3$ ;
- (b)  $\dim(V) = 5$ ;
- (c)  $\dim(V) = 4$ ;
- (d)  $\dim(V) = a_0 + a_2 + a_4$ ;
- (e)  $V$  tem dimensão infinita.

**Questão 18.** *Considere a transformação linear<sup>2</sup>  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por:*

$$T(x, y, z) = (x + 2y - z, 2x + 4y - 2z, -x - 2y + z).$$

*Determine uma base de  $\text{Ker}(T)$ .*

- (a)  $\{(1, -2, -1)\}$  ;
- (b)  $\{(2, -1, 0), (1, 0, 1)\}$  ;
- (c)  $\{(2, 1, 0), (1, 0, 1)\}$ ;
- (d)  $\{(1, 2, -1)\}$  ;
- (e)  $\{(2, -1, 0), (1, 1, 1)\}$  .

**Questão 19.** *Sejam  $V$  e  $W$  dois espaços vetoriais, e  $T: V \rightarrow W$  uma transformação linear. Seja  $b$  um vetor tal que a equação  $T(x) = b$  admite pelo menos uma solução. Em quais dos seguintes casos a solução desta equação é única?*

- (a) se  $b \in \text{Ker}(T)$ ;
- (b) se  $b \in \text{Im}(T)$ ;
- (c) se  $\text{Ker}(T) = \{0\}$ ;
- (d) se  $\text{Im}(T) = W$ ;
- (e) se  $x \in \text{Im}(T)$ .

---

<sup>2</sup>É a mesma da Questão 15!

**Questão 20.** Calcule a dimensão e uma base  $\mathcal{B}$  do seguinte espaço vetorial:

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - 2z = 0\}.$$

- (a)  $\dim(V) = 3$ ,  $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1), (1, -1, 0), (0, 2, 1)\}$ ;
- (b)  $\dim(V) = 2$ ,  $\mathcal{B} = \{(1, -1, 0), (0, 2, 1)\}$ ;
- (c)  $\dim(V) = 2$ ,  $\mathcal{B} = \{(1, -1, 0), (0, -2, 1)\}$ ;
- (d)  $\dim(V) = 2$ ,  $\mathcal{B} = \{(1, 1, 0), (0, 2, 1)\}$ ;
- (e)  $\dim(V) = 1$ ,  $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1)\}$ .



MAT 122 — Álgebra Linear

Prof. Paolo Piccione

Prova 1

18 de outubro de 2018

Nome: \_\_\_\_\_

Número USP: \_\_\_\_\_

Assinatura: \_\_\_\_\_

Folha de Respostas C

|           |   |   |   |   |   |
|-----------|---|---|---|---|---|
| <b>1</b>  | a | b | c | d | e |
| <b>2</b>  | a | b | c | d | e |
| <b>3</b>  | a | b | c | d | e |
| <b>4</b>  | a | b | c | d | e |
| <b>5</b>  | a | b | c | d | e |
| <b>6</b>  | a | b | c | d | e |
| <b>7</b>  | a | b | c | d | e |
| <b>8</b>  | a | b | c | d | e |
| <b>9</b>  | a | b | c | d | e |
| <b>10</b> | a | b | c | d | e |
| <b>11</b> | a | b | c | d | e |
| <b>12</b> | a | b | c | d | e |
| <b>13</b> | a | b | c | d | e |
| <b>14</b> | a | b | c | d | e |
| <b>15</b> | a | b | c | d | e |
| <b>16</b> | a | b | c | d | e |
| <b>17</b> | a | b | c | d | e |
| <b>18</b> | a | b | c | d | e |
| <b>19</b> | a | b | c | d | e |
| <b>20</b> | a | b | c | d | e |

Deixe em branco.

| Corretas | Erradas | Nota |
|----------|---------|------|
|          |         |      |