

MAT 122 — Álgebra Linear – Prova 1

Prof. Paolo Piccione

18 de outubro de 2018

Nome: _____

Número USP: _____

Assinatura: _____

Instruções

- A duração da prova é de **uma hora e quarenta minutos**.
- Assinale as alternativas corretas na **folha de respostas** que está no final da prova. *É permitido deixar questões em branco.*
- Cada questão tem apenas **uma resposta correta**.
- O valor total da prova é de **10** pontos; cada questão correta vale $\frac{1}{2}$ ponto (0.5) e *cada questão errada implica num desconto de $\frac{1}{10}$ de ponto* (0.10).
- No final da prova, deve ser entregue apenas a folha de respostas (na última página).
- **Boa Prova!**

Terminologia e Notações Utilizadas na Prova

- Todos os espaços vetoriais nesta prova são *reais*, ou seja, seu corpo de escalares é \mathbb{R} . Os espaços podem ter dimensão finita ou não.
- Dada uma transformação linear $T: V \rightarrow W$ entre espaços vetoriais, $\boxed{\text{Ker}(T)}$ denota o núcleo de T e $\boxed{\text{Im}(T)}$ a imagem de T .
- Para todo inteiro positivo n , o símbolo \mathbb{R}^n denota o espaço vetorial

$$\{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, \forall i = 1, \dots, n\}.$$

- O símbolo \mathcal{P}_n denote o espaço de todos os polinômios com coeficientes reais de grau menor ou igual a n . Se $p \in \mathcal{P}_n$, i.e.,

$$p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n,$$

então p' denota sua derivada: $p'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + na_nx^{n-1}$. Analogamente, p'' denota a derivada segunda de p .

**NÃO ESQUEÇA DE POR SEU NOME
NA FOLHA DE RESPOSTAS!!!**

B

Questão 1. Seja $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma transformação linear tal que:

$$T(1, 1) = (2, 1, 0) \quad \text{e} \quad T(2, 3) = (1, -1, 1).$$

Calcule $T(0, -1)$.

- (a) $T(0, -1) = (3, 3, 1)$;
- (b) $T(0, -1) = (3, -3, 1)$;
- (c) $T(0, -1) = (3, 3, -1)$;
- (d) $T(0, -1) = (0, 0, 0)$;
- (e) $T(0, -1) = (-3, 3, -1)$.

Questão 2. Sejam U e V subespaços vetoriais de \mathbb{R}^5 . Quais das seguintes afirmações é verdadeira?

- (I) $\dim(U + V) \leq 5$;
- (II) $\dim(U \cap V) \leq 5$;
- (III) $\dim(U) \leq \dim(U + V)$.

- (a) todas as afirmações são verdadeiras;
- (b) somente a (I) e (III) são verdadeiras;
- (c) nenhuma das afirmações é verdadeira;
- (d) somente a (I) é verdadeira;
- (e) somente a (I) e (II) são verdadeiras .

Questão 3. Calcule o produto linhas por colunas $A \times B$ das matrizes $A =$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- (a) $A \times B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$;
- (b) $A \times B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$;
- (c) $A \times B = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$;
- (d) $A \times B = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$;
- (e) $A \times B = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ -1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Questão 4. Calcule a dimensão e uma base \mathcal{B} do seguinte espaço vetorial:

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - 2z = 0\}.$$

- (a) $\dim(V) = 3$, $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1), (1, -1, 0), (0, 2, 1)\}$;
- (b) $\dim(V) = 1$, $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1)\}$;
- (c) $\dim(V) = 2$, $\mathcal{B} = \{(1, -1, 0), (0, 2, 1)\}$;
- (d) $\dim(V) = 2$, $\mathcal{B} = \{(1, -1, 0), (0, -2, 1)\}$;
- (e) $\dim(V) = 2$, $\mathcal{B} = \{(1, 1, 0), (0, 2, 1)\}$.

Questão 5. Dado a conjunto $S = \{(1, 0, 1), (0, 1, a), (1, 1, b), (1, 1, 1)\}$, determine os valores de a e b tais que S **não gera** todo o espaço \mathbb{R}^3 .

- (a) $a = b = 0$;
- (b) $a = 1$, $b = 0$;
- (c) $a = 0$, $b = 1$;
- (d) S gera \mathbb{R}^3 para todos os valores de a e b ;
- (e) $a = b = 1$.

Questão 6. (Leia as instruções na primeira página para lembrar as notações utilizadas no espaço vetorial de polinômios com coeficientes reais.)

Considere o operador linear $T: \mathcal{P}_3 \rightarrow \mathcal{P}_3$ dado por:

$$T(p) = p' - p''.$$

Determine o núcleo de T .

- (a) $\text{Ker}(T) = \{0\}$;
- (b) $\text{Ker}(T) = \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 : a_1 = a_2 = a_3 = 0\}$;
- (c) $\text{Ker}(T) = \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 : a_0 = a_1 = 0\}$;
- (d) $\text{Ker}(T) = \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 : a_1 = a_2 = a_3 = 0\}$;
- (e) $\text{Ker}(T) = \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 : a_1 = 2a_2 = 6a_3\}$.

Questão 7. Determine as soluções do sistema linear não homogêneo:

$$\begin{cases} x + y & = 1, \\ 2x & + z = 1, \\ x + 2y + 2z & = -1. \end{cases}$$

- (a) $(x, y, z) = (-t, 1 + t, t)$, com $t \in \mathbb{R}$;
- (b) $(x, y, z) = (t, 0, -t)$, com $t \in \mathbb{R}$;
- (c) o sistema não admite soluções;
- (d) $(x, y, z) = (t, 1 - t, -t)$, com $t \in \mathbb{R}$;
- (e) $(x, y, z) = (1, 0, -1)$.

Questão 8. *Sejam V e W espaços vetoriais, $T: V \rightarrow W$ uma transformação linear, e $\{v_1, \dots, v_n\}$ uma família de vetores de V . Se a família de vetores $\{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$ é linearmente independente, o que podemos concluir?*

- (a) $\{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$ é uma base de W ;
- (b) a família $\{v_1, \dots, v_n\}$ é linearmente independente;
- (c) a família $\{v_1, \dots, v_n\}$ gera V ;
- (d) os vetores $T(v_1), \dots, T(v_n)$ são combinações lineares de v_1, \dots, v_n ;
- (e) a família $\{v_1, \dots, v_n\}$ é linearmente dependente.

Questão 9. *Seja V um espaço vetorial, e $\{v_1, v_2, \dots, v_{14}, v_{15}\}$ uma família de vetores de V que geram V . O que podemos afirmar sobre a dimensão de V ?*

- (a) $7 \leq \dim(V) \leq 8$;
- (b) $\dim(V) \geq 30$;
- (c) $\dim(V) = 15$;
- (d) $\dim(V) \geq 15$;
- (e) $\dim(V) \leq 15$.

Questão 10. *Determine a dimensão do espaço vetorial V de todos os polinômios da forma $p(x) = a_0 + a_2x^2 + a_4x^4$, com $a_0, a_2, a_4 \in \mathbb{R}$.*

- (a) $\dim(V) = 5$;
- (b) $\dim(V) = 3$;
- (c) $\dim(V) = 4$;
- (d) V tem dimensão infinita;
- (e) $\dim(V) = a_0 + a_2 + a_4$.

Questão 11. *Dado o sistema de equações lineares:*

$$\begin{cases} x + y + z = c_1, \\ 2x + 2y - z = c_2, \\ 4x + 4y + 5z = c_3, \end{cases}$$

determine para quais $c = (c_1, c_2, c_3)$ existem soluções.

- (a) para todo $c \in \mathbb{R}^3$;
- (b) $c_1 + 2c_2 - c_3 = 0$;
- (c) $c_3 - 2c_1 - c_2 = 0$;
- (d) somente para $c = (0, 0, 0)$;
- (e) $2c_1 + c_2 + c_3 = 0$.

Questão 12. Considere a transformação linear¹ $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por:

$$T(x, y, z) = (x + 2y - z, 2x + 4y - 2z, -x - 2y + z).$$

Determine uma base de $\text{Im}(T)$.

- (a) $\{(2, -1, 0), (1, 0, 1)\}$;
- (b) $\{(1, -2, -1)\}$;
- (c) $\{(1, 2, -1)\}$;
- (d) $\{(1, 2, 1)\}$;
- (e) $\{(2, 1, 0), (1, 0, 1)\}$.

Questão 13. Sejam V e W dois espaços vetoriais, e $T: V \rightarrow W$ uma transformação linear. Para quais vetores b a equação $T(x) = b$ admite pelo menos uma solução?

- (a) para $b \in \text{Ker}(T)$;
- (b) para todo $b \in V$;
- (c) para $b \in \text{Im}(T)$;
- (d) para todo $b \in W$;
- (e) para $b \in \text{Im}(T) \cap \text{Ker}(T)$.

Questão 14. Sejam V e W dois espaços vetoriais, e $T: V \rightarrow W$ uma transformação linear. Quais das seguintes afirmações é sempre verdadeira?

- (a) $\dim(\text{Ker}(T)) = \dim(W)$;
- (b) $\dim(V) - \dim(W) \leq -\dim(\text{Ker}(T))$;
- (c) $\dim(V) + \dim(W) = \dim(\text{Ker}(T))$;
- (d) $\dim(\text{Ker}(T)) \geq \dim(W) - \dim(V)$;
- (e) $\dim(W) \geq \dim(V) - \dim(\text{Ker}(T))$.

Questão 15. Determinar todas as soluções do sistema linear não homogêneo:

$$\begin{cases} 4x + 5y = 1 \\ 12x + 15y = 0. \end{cases}$$

- (a) $x = y = t$, com $t \in \mathbb{R}$;
- (b) o sistema não admite soluções;
- (c) $x = 1, y = -1$;
- (d) $x = y = 0$;
- (e) $x = 1, y = -1$ e $x = y = 0$.

¹É a mesma da Questão 17!

Questão 16. *Seja V um espaço vetorial de dimensão 3. Quais das afirmações a seguir são verdadeiras?*

- (I) *Qualquer conjunto linearmente independente formado por três vetores de V é uma base de V .*
- (II) *Qualquer conjunto linearmente independente pode ter no máximo três vetores.*
- (III) *Qualquer conjunto formado por três vetores de V é linearmente independente.*

- (a) todas verdadeiras;
- (b) verdadeiras apenas a (I) e a (II);
- (c) verdadeiras apenas a (II) e a (III);
- (d) verdadeira apenas a (I);
- (e) verdadeiras apenas a (I) e a (III).

Questão 17. *Considere a transformação linear² $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por:*

$$T(x, y, z) = (x + 2y - z, 2x + 4y - 2z, -x - 2y + z).$$

Determine uma base de $\text{Ker}(T)$.

- (a) $\{(2, -1, 0), (1, 0, 1)\}$;
- (b) $\{(1, -2, -1)\}$;
- (c) $\{(1, 2, -1)\}$;
- (d) $\{(2, 1, 0), (1, 0, 1)\}$;
- (e) $\{(2, -1, 0), (1, 1, 1)\}$.

Questão 18. *Sejam V e W dois espaços vetoriais, e $T: V \rightarrow W$ uma transformação linear. Qual é o enunciado correto do Teorema do Núcleo e da Imagem?*

- (a) $\dim(\text{ker}(T)) - \dim(\text{Im}(T)) = \dim(V)$;
- (b) $\dim(\text{ker}(T)) + \dim(\text{Im}(T)) = \dim(V)$;
- (c) $\dim(\text{ker}(T)) + \dim(\text{Im}(T)) = \dim(V) - \dim(W)$;
- (d) $\dim(\text{ker}(T)) - \dim(\text{Im}(T)) = \dim(W)$;
- (e) $\dim(\text{ker}(T)) + \dim(\text{Im}(T)) = \dim(W)$.

²É a mesma da Questão 12!

Questão 19. *Sejam V e W dois espaços vetoriais, e $T: V \rightarrow W$ uma transformação linear. Seja b um vetor tal que a equação $T(x) = b$ admite pelo menos uma solução. Em quais dos seguintes casos a solução desta equação é única?*

- (a) se $b \in \text{Im}(T)$;
- (b) se $\text{Im}(T) = W$;
- (c) se $b \in \text{Ker}(T)$;
- (d) se $x \in \text{Im}(T)$;
- (e) se $\text{Ker}(T) = \{0\}$.

Questão 20. *Calcule a matriz A^{-1} inversa da matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$*

(a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix};$

(b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix};$

(c) A não é inversível;

(d) $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix};$

(e) $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$

MAT 122 — Álgebra Linear

Prof. Paolo Piccione

Prova 1

18 de outubro de 2018

Nome: _____

Número USP: _____

Assinatura: _____

Folha de Respostas **B**

1	a	b	c	d	e
2	a	b	c	d	e
3	a	b	c	d	e
4	a	b	c	d	e
5	a	b	c	d	e
6	a	b	c	d	e
7	a	b	c	d	e
8	a	b	c	d	e
9	a	b	c	d	e
10	a	b	c	d	e
11	a	b	c	d	e
12	a	b	c	d	e
13	a	b	c	d	e
14	a	b	c	d	e
15	a	b	c	d	e
16	a	b	c	d	e
17	a	b	c	d	e
18	a	b	c	d	e
19	a	b	c	d	e
20	a	b	c	d	e

Deixe em branco.

Corretas	Erradas	Nota