

MAT 112 — Vetores e Geometria

Prof. Paolo Piccione

27 de junho de 2019

Prova 2 — **H**

2019146

Nome: \_\_\_\_\_

Número USP: \_\_\_\_\_

Assinatura: \_\_\_\_\_

**Instruções**

- A duração da prova é de **uma hora e quarenta minutos**.
- Assinale as alternativas corretas na **folha de respostas** que está no final da prova. *É permitido deixar questões em branco.*
- Cada questão tem apenas **uma resposta correta**.
- O valor total da prova é de **10** pontos; cada questão correta vale  $\frac{1}{2}$  ponto (0.5) e *cada questão errada implica num desconto de  $\frac{1}{10}$  de ponto (0.1).*
- No final da prova, deve ser entregue apenas a folha de respostas (na última página)
- **Boa Prova!**

**Terminologia e Notações Utilizadas na Prova**

- Todos os sistemas de coordenadas utilizados na prova são ortogonais.
- Para vetores  $v$  e  $w$ ,  $v \times w$  denota o produto vetorial de  $v$  e  $w$

***NÃO ESQUEÇA DE POR SEU NOME  
NA FOLHA DE RESPOSTAS!!!***

**Questão 1.** Ache o ângulo  $\theta$  entre as retas  $r : (1, 1, 9) + \lambda(0, 1, -1)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , e:

$$s : \begin{cases} x - y = 1, \\ z = 4. \end{cases}$$

- (a)  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ;
- (b)  $\theta = \frac{\pi}{6}$ ;
- (c)  $\theta = \frac{\pi}{4}$ ;
- (d)  $\theta = \frac{\pi}{3}$ ;
- (e)  $\theta = 0$ .

**Questão 2.** Sejam  $(u, v)$  as coordenadas obtidas fazendo uma translação do sistema de coordenadas  $(x, y)$ . A origem  $O'$  do sistema de coordenadas  $(u, v)$  é o ponto de coordenadas  $(x, y) = (1, -1)$ . Como se escreve a equação  $2x^2 + y^2 - 4x + 2y - 1 = 0$  nas coordenadas  $(u, v)$ ?

- (a)  $u^2 + 2v^2 - 4 = 0$ ;
- (b)  $2u^2 + v^2 - 1 = 0$ ;
- (c)  $2u^2 + 2v^2 - 4 = 0$ ;
- (d)  $2u^2 + v^2 - 4 = 0$ ;
- (e)  $2u^2 + v^2 + uv - 4 = 0$ .

**Questão 3.** Determine a posição relativa da reta  $r$  e a esfera  $S$ :

$$r : \begin{cases} x = 1 + \lambda, \\ y = 2\lambda, \\ z = -1 + \lambda, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad S : x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 3 = 0.$$

- (a)  $r$  intercepta  $S$  e não passa pelo centro de  $S$ ;
- (b)  $r$  intercepta  $S$  em 2 pontos e passa pelo centro de  $S$ ;
- (c)  $S$  não é uma esfera;
- (d)  $r$  é tangente a  $S$ ;
- (e)  $r \cap S = \emptyset$ .

**Questão 4.** *Sejam  $(u, v)$  coordenadas ortogonais no plano obtidas fazendo uma translação do sistema de coordenadas  $(x, y)$ , e denote com  $O'$  a origem do sistema  $(u, v)$ . Sabe-se que, nas coordenadas  $(u, v)$ , a equação quadrática  $x^2 + xy - 2y^2 + 2x - 3y + 4 = 0$  se transforma numa equação quadrática em  $(u, v)$  sem os termos lineares (i.e., de grau 1 em  $u$  e  $v$ ). Calcule as coordenadas  $(x, y)$  do ponto  $O'$ .*

- (a)  $O' = \left(-\frac{5}{9}, \frac{8}{9}\right)$ ;
- (b)  $O' = \left(\frac{5}{9}, -\frac{8}{9}\right)$ ;
- (c)  $O' = \left(-\frac{7}{9}, -\frac{8}{9}\right)$ ;
- (d)  $O' = \left(-\frac{5}{9}, -\frac{8}{9}\right)$ ;
- (e)  $O' = \left(\frac{7}{9}, -\frac{8}{9}\right)$ .

**Questão 5.** *Determine a posição relativa entre a reta  $r$  e o plano  $\pi$ :*

$$r : \begin{cases} x = 1 - \lambda, \\ y = 2\lambda, \\ z = -1 - \lambda, \end{cases}, \quad \pi : x + y + z = 0.$$

- (a)  $r$  intercepta  $\pi$  em um ponto apenas, mas não é ortogonal a  $\pi$ ;
- (b)  $r$  intercepta  $\pi$  exatamente em 2 pontos;
- (c)  $r$  está contida em  $\pi$ ;
- (d)  $r$  é paralela a  $\pi$ , e  $r \cap \pi = \emptyset$ ;
- (e)  $r$  é ortogonal a  $\pi$ .

**Questão 6.** *Sejam  $(u, v)$  as coordenadas obtidas fazendo uma rotação (no sentido anti-horário) de  $\theta = \frac{\pi}{4}$  do sistema de coordenadas  $(x, y)$ . Como se escreve a equação  $2x^2 + 2y^2 - xy - 1 = 0$  nas coordenadas  $(u, v)$ ?*

- (a)  $\frac{5}{2}u^2 + \frac{3}{2}v^2 - 1 = 0$ ;
- (b)  $\frac{5}{2}u^2 - \frac{3}{2}v^2 - 1 = 0$ ;
- (c)  $\frac{3}{2}u^2 + \frac{3}{2}v^2 - 1 = 0$ ;
- (d)  $-\frac{5}{2}u^2 + \frac{3}{2}v^2 - 1 = 0$ ;
- (e)  $\frac{5}{2}u^2 + \frac{5}{2}v^2 - 1 = 0$ .

**Questão 7.** Dado o plano  $\pi$  de equações paramétricas:

$$x = 2 + \lambda - \mu, \quad y = 3 - 2\lambda + \mu, \quad z = -1 + \lambda + \mu,$$

determine a equação geral de  $\pi$ .

- (a)  $3x - 2y - z + 15 = 0$ ;
- (b)  $-3x + 2y - 3z - 15 = 0$ ;
- (c)  $3x + 2y - z + 11 = 0$ ;
- (d)  $3x - 2y - z - 11 = 0$ ;
- (e)  $3x + 2y + z - 11 = 0$ .

**Questão 8.** A reta  $s$  passa pelo ponto  $P = (2, 2, 3)$  e é perpendicular à reta  $r : X = (1, -1, -1) + \lambda(2, 1, -3)$ . O ponto onde  $s$  intercepta  $r$  é:

- (a)  $(0, \frac{-3}{2}, \frac{1}{2})$ ;
- (b)  $(0, -3, 2)$ ;
- (c)  $(0, 0, 0)$ ;
- (d)  $(1, 1, 1)$ ;
- (e)  $(0, \frac{-2}{3}, \frac{1}{2})$ .

**Questão 9.** Calcule a distância do ponto  $(1, 1, -1)$  à reta:

$$r : \begin{cases} x - y = 1, \\ x + y - z = 0. \end{cases}$$

- (a)  $\frac{2}{7}$ ;
- (b)  $\frac{\sqrt{7}}{2}$ ;
- (c)  $\frac{7}{2}$ ;
- (d)  $\frac{2}{\sqrt{14}}$ ;
- (e)  $\frac{\sqrt{14}}{2}$ .

**Questão 10.** Determine os planos ortogonais ao vetor  $\vec{v} = (2, 3, -6)$  e tangentes à esfera  $S : x^2 + y^2 + z^2 - 2x = 0$ .

- (a)  $\pi_1 : -3x - 2y + 6z + 5 = 0, \pi_2 : -3x - 2y + 6z - 9 = 0$ ;
- (b) não existe nenhum plano ortogonal a  $\vec{v}$  e tangente a  $S$ ;
- (c)  $S$  não é uma esfera;
- (d)  $\pi_1 : 3x + 2y - 6z = 0, \pi_2 : 3x + 2y - 6z + 5 = 0$ ;
- (e)  $\pi_1 : 2x + 3y - 6z + 5 = 0, \pi_2 : 2x + 3y - 6z - 9 = 0$ .

**Questão 11.** Determine a equação das esferas  $S_+$  e  $S_-$  de raio  $R = 2\sqrt{3}$  que são tangentes ao plano  $\pi : x - y + z = 1$  no ponto  $P = (0, 0, 1)$

- (a)  $S_+ : (x - 3)^2 + (y + 3)^2 + (z - 2)^2 = 2\sqrt{3}$ ,  
 $S_- : (x + 2)^2 + (y - 2)^2 + (z - 21)^2 = 2\sqrt{3}$ ;
- (b)  $S_{\pm} : (x \pm 3)^2 + (y \mp 2)^2 + (z \pm 2)^2 = 12$ ;
- (c)  $S_+ : (x - 3)^2 + (y + 3)^2 + (z - 2)^2 = 12$ ,  
 $S_- : (x + 2)^2 + (y - 2)^2 + (z - 21)^2 = 12$ ;
- (d)  $S_{\pm} : (x \pm 2)^2 + (y \mp 2)^2 + (z \pm 3)^2 = 12$ ;
- (e)  $S_+ : (x - 2)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 12$ ,  
 $S_- : (x + 2)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 12$ .

**Questão 12.** Determine os focos da elipse  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$ .

- (a)  $F_1 = (0, -2)$ ,  $F_2 = (3, 0)$ ;
- (b)  $F_1 = (0, -3)$ ,  $F_2 = (0, 3)$ ;
- (c)  $F_1 = (-3, 0)$ ,  $F_2 = (3, 0)$ ;
- (d)  $F_1 = (-2, 0)$ ,  $F_2 = (2, 0)$ ;
- (e)  $F_1 = (0, -2)$ ,  $F_2 = (0, 2)$ .

**Questão 13.** Determine o foco da parábola  $8x + 18y^2 = 0$ .

- (a)  $(\frac{1}{9}, -\frac{1}{4})$ ;
- (b)  $(0, -\frac{1}{9})$ ;
- (c)  $(0, -\frac{1}{4})$ ;
- (d)  $(-\frac{1}{9}, 0)$ ;
- (e)  $(-\frac{1}{4}, 0)$ .

**Questão 14.** Calcule o raio  $r$  da circunferência dada pela interseção da esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  com o plano  $x + y + z = 1$ .

- (a)  $r = \sqrt{5/3}$ ;
- (b) a interseção da esfera e do plano é vazia;
- (c)  $r = 1/\sqrt{3}$ ;
- (d)  $r = \sqrt{2/3}$ ;
- (e)  $r = \sqrt{3/2}$ .

**Questão 15.** Determine  $m$  para que os planos  $\pi_1$  e  $\pi_2$  sejam ortogonais:

$$\pi_1 : (1 - m)x - my + z = 0, \quad \pi_2 : (m + 1)x + my - 3 = 0.$$

- (a)  $m = \pm \frac{1}{2}$ ;
- (b)  $m = \pm \sqrt{3}$ ;
- (c)  $m = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ ;
- (d) não existe algum  $m$  que torne os planos  $\pi_1$  e  $\pi_2$  ortogonais;
- (e)  $m = \pm 1$ .

**Questão 16.** Calcule o perímetro do triângulo cujos vértices são os pontos médios dos lados do triângulo  $ABC$ , sendo  $A = (2, 1, 3)$ ,  $B = (4, -1, 1)$  e  $C = (0, 1, -1)$ .

- (a)  $\sqrt{6} + \sqrt{5} + \sqrt{3}$ ;
- (b)  $\sqrt{12} + \sqrt{20} + \sqrt{24}$ ;
- (c) 1;
- (d)  $\sqrt{5} + \sqrt{3} + \sqrt{2}$ ;
- (e) 16 .

**Questão 17.** Calcule a distância  $d$  entre o ponto  $P = (2, 3)$  e o ponto médio do segmento com extremos  $A = (5, 1)$  e  $B = (1, 3)$ .

- (a)  $d = 2$ ;
- (b)  $d = 3$ ;
- (c)  $d = 0$ ;
- (d)  $d = \sqrt{2}$ ;
- (e)  $d = \sqrt{3}$ .

**Questão 18.** Determine a posição relativa das esferas

$$S_1 : (x - 1)^2 + y^2 + (z + 1)^2 = 1, \quad e \quad S_2 : (x - 2)^2 + (y - 2)^2 + z^2 = 4.$$

- (a)  $S_1 \cap S_2$  é uma circunferência de raio  $r < 1$ ;
- (b)  $S_1 \cap S_2$  é uma circunferência de raio  $1 < r < 2$ ;
- (c)  $S_1$  e  $S_2$  são tangentes;
- (d)  $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ ;
- (e)  $S_1 \cap S_2$  é uma circunferência de raio  $r > 2$ .

**Questão 19.** *Determine a equação da esfera com centro no ponto  $C = (1, 2, -1)$  e tangente ao plano  $\pi : 2x - 2y + z = 0$ .*

- (a)  $x^2 + y^2 + z^2 - 10 = 0$ ;
- (b)  $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 2z + 6 = 0$ ;
- (c)  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 2z + 5 = 0$ ;
- (d)  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 2z + 6 = 0$ ;
- (e)  $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 2z + 5 = 0$ .

**Questão 20.** *Calcule a distância entre o plano  $3x + 2y + z - 2 = 0$  e o ponto  $(1, 2, 3)$ .*

- (a)  $\frac{10}{\sqrt{14}}$ ;
- (b) 10;
- (c)  $\frac{8}{\sqrt{14}}$ ;
- (d)  $\frac{\sqrt{14}}{8}$ ;
- (e) 8.

MAT 112 — Vetores e Geometria

Turma 2019146

Prof. Paolo Piccione

Prova 2 — **H**

27 de junho de 2019

Nome: \_\_\_\_\_

Número USP: \_\_\_\_\_

Assinatura: \_\_\_\_\_

### Folha de Respostas

<b>1</b>	a	b	c	d	e
<b>2</b>	a	b	c	d	e
<b>3</b>	a	b	c	d	e
<b>4</b>	a	b	c	d	e
<b>5</b>	a	b	c	d	e
<b>6</b>	a	b	c	d	e
<b>7</b>	a	b	c	d	e
<b>8</b>	a	b	c	d	e
<b>9</b>	a	b	c	d	e
<b>10</b>	a	b	c	d	e
<b>11</b>	a	b	c	d	e
<b>12</b>	a	b	c	d	e
<b>13</b>	a	b	c	d	e
<b>14</b>	a	b	c	d	e
<b>15</b>	a	b	c	d	e
<b>16</b>	a	b	c	d	e
<b>17</b>	a	b	c	d	e
<b>18</b>	a	b	c	d	e
<b>19</b>	a	b	c	d	e
<b>20</b>	a	b	c	d	e

Deixe em branco.

Corretas	Erradas	Nota