MAT 112 — Vetores e Geometria

Prof. Paolo Piccione

27 de junho de 2019

Prova 2 — $\boxed{\textbf{E}}$

2019146

Nome: ____

Número USP: ____

Assinatura: ____

Instruções

- A duração da prova é de **uma hora e quarenta minutos**.
- Assinale as alternativas corretas na **folha de respostas** que está no final da prova. *É permitido deixar questões em branco.*
- Cada questão tem apenas **uma resposta correta**.
- O valor total da prova é de **10** pontos; cada questão correta vale $\mathbf{\frac{1}{2}}$ ponto (0.5) e *cada questão errada implica num desconto de* $\mathbf{\frac{1}{10}}$ *de ponto* (0.1).
- No final da prova, deve ser entregue apenas a folha de respostas (na última página)
- **Boa Prova!**

Terminologia e Notações Utilizadas na Prova

- Todos os sistemas de coordenadas utilizados na prova são ortogonais.
- Para vetores v e w, $v \times w$ denota o produto vetorial de v e w

NÃO ESQUEÇA DE POR SEU NOME
NA FOLHA DE RESPOSTAS!!!

Questão 1. *Calcule a distância* d *entre o ponto* $P = (2, 3)$ *e o ponto médio do segmento com extremos* $A = (5, 1)$ *e* $B = (1, 3)$*.*

(a) $d = 0$;
(b) $d = \sqrt{2}$;
(c) $d = 2$;
(d) $d = 3$;
(e) $d = \sqrt{3}$.

Questão 2. *Ache o ângulo* θ *entre as retas* $r : (1, 1, 9) + \lambda(0, 1, -1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, *e:*

$$s : \begin{cases} x - y = 1, \\ z = 4. \end{cases}$$

(a) $\theta = \dfrac{\pi}{4}$;
(b) $\theta = \dfrac{\pi}{2}$;
(c) $\theta = 0$;
(d) $\theta = \dfrac{\pi}{6}$;
(e) $\theta = \dfrac{\pi}{3}$.

Questão 3. *Sejam* (u, v) *coordenadas ortogonais no plano obtidas fazendo uma* translação *do sistema de coordenadas* (x, y)*, e denote com* O' *a origem do sistema* (u, v)*. Sabe-se que, nas coordenadas* (u, v)*, a equação quadrática* $x^2 + xy - 2y^2 + 2x - 3y + 4 = 0$ *se transforma numa equação quadrática em* (u, v) sem os termos lineares (i.e., de grau 1 em u e v)*. Calcule as coordenadas* (x, y) *do ponto* O'*.*

(a) $O' = \left(-\frac{5}{9}, -\frac{8}{9}\right)$;
(b) $O' = \left(-\frac{7}{9}, -\frac{8}{9}\right)$;
(c) $O' = \left(\frac{7}{9}, -\frac{8}{9}\right)$;
(d) $O' = \left(\frac{5}{9}, -\frac{8}{9}\right)$;
(e) $O' = \left(-\frac{5}{9}, \frac{8}{9}\right)$.

Questão 4. *A reta s passa pelo ponto* $P = (2, 2, 3)$ *e é perpendicular à reta* $r : X = (1, -1, -1) + \lambda(2, 1, -3)$. *O ponto onde s intercepta r é:*

(a) $(1, 1, 1)$;
(b) $(0, \frac{-2}{3}, \frac{1}{2})$;
(c) $(0, -3, 2)$;
(d) $(0, \frac{-3}{2}, \frac{1}{2})$;
(e) $(0, 0, 0)$.

Questão 5. *Calcule a distância do ponto* $(1, 1, -1)$ *à reta:*

$$r : \begin{cases} x - y = 1, \\ x + y - z = 0. \end{cases}$$

(a) $\dfrac{2}{7}$;
(b) $\dfrac{2}{\sqrt{14}}$;
(c) $\dfrac{7}{2}$;
(d) $\dfrac{\sqrt{14}}{2}$;
(e) $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$.

Questão 6. *Dado o plano* π *de equações paramétricas:*

$$x = 2 + \lambda - \mu, \quad y = 3 - 2\lambda + \mu, \quad z = -1 + \lambda + \mu,$$

determine a equação geral de π.

(a) $-3x + 2y - 3z - 15 = 0$;
(b) $3x - 2y - z + 15 = 0$;
(c) $3x + 2y + z - 11 = 0$;
(d) $3x + 2y - z + 11 = 0$;
(e) $3x - 2y - z - 11 = 0$.

Questão 7. *Calcule a distância entre o plano* $3x + 2y + z - 2 = 0$ *e o ponto* $(1, 2, 3)$.

(a) 10;
(b) 8;
(c) $\frac{10}{\sqrt{14}}$;
(d) $\frac{\sqrt{14}}{8}$;
(e) $\frac{8}{\sqrt{14}}$.

Questão 8. *Calcule o raio* r *da circunferência dada pela interseção da esfera* $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ *com o plano* $x + y + z = 1$.

(a) a interseção da esfera e do plano é vazia;
(b) $r = \sqrt{5/3}$;
(c) $r = \sqrt{2/3}$;
(d) $r = 1/\sqrt{3}$;
(e) $r = \sqrt{3/2}$.

Questão 9. *Determine a posição relativa da reta* r *e a esfera* S*:*

$$r : \begin{cases} x = 1 + \lambda, \\ y = 2\lambda, \\ z = -1 + \lambda, \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R}, \qquad S : x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 3 = 0.$$

(a) r intercepta S e não passa pelo centro de S;
(b) S não é uma esfera;
(c) $r \cap S = \emptyset$;
(d) r é tangente a S;
(e) r intercepta S em 2 pontos e passa pelo centro de S.

Questão 10. *Determine a posição relativa entre a reta* r *e o plano* π*:*

$$r : \begin{cases} x = 1 - \lambda, \\ y = 2\lambda, \\ z = -1 - \lambda, \end{cases} \qquad , \qquad \pi : x + y + z = 0.$$

(a) r é ortogonal a π;
(b) r é paralela a π, e $r \cap \pi = \emptyset$;
(c) r intercepta π em um ponto apenas, mas não é ortogonal a π;
(d) r intercepta π exatamente em 2 pontos;
(e) r está contida em π.

Questão 11. *Calcule o perímetro do triângulo cujos vértices são os pontos médios dos lados do triângulo ABC, sendo $A = (2, 1, 3)$, $B = (4, -1, 1)$ e $C = (0, 1, -1)$.*

(a) 16 ;
(b) 1;
(c) $\sqrt{12} + \sqrt{20} + \sqrt{24}$;
(d) $\sqrt{5} + \sqrt{3} + \sqrt{2}$;
(e) $\sqrt{6} + \sqrt{5} + \sqrt{3}$.

Questão 12. *Determine m para que os planos π_1 e π_2 sejam ortogonais:*

$$\pi_1 : (1-m)x - my + z = 0, \quad \pi_2 : (m+1)x + my - 3 = 0.$$

(a) $m = \pm\sqrt{3}$;
(b) não existe algum m que torne os planos π_1 e π_2 ortogonais;
(c) $m = \pm\frac{1}{2}$;
(d) $m = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$;
(e) $m = \pm 1$.

Questão 13. *Determine os planos ortogonais ao vetor $\vec{v} = (2, 3, -6)$ e tangentes à esfera $S : x^2 + y^2 + z^2 - 2x = 0$.*

(a) $\pi_1 : -3x - 2y + 6z + 5 = 0$, $\pi_2 : -3x - 2y + 6z - 9 = 0$;
(b) S não é uma esfera;
(c) $\pi_1 : 2x + 3y - 6z + 5 = 0$, $\pi_2 : 2x + 3y - 6z - 9 = 0$;
(d) $\pi_1 : 3x + 2y - 6z = 0$, $\pi_2 : 3x + 2y - 6z + 5 = 0$;
(e) não existe nenhum plano ortogonal a $\vec{v}$ e tangente a S.

Questão 14. *Determine os focos da elipse $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{25} = 1$.*

(a) $F_1 = (0, -2)$, $F_2 = (3, 0)$;
(b) $F_1 = (0, -3)$, $F_2 = (0, 3)$;
(c) $F_1 = (0, -2)$, $F_2 = (0, 2)$;
(d) $F_1 = (-2, 0)$, $F_2 = (2, 0)$;
(e) $F_1 = (-3, 0)$, $F_2 = (3, 0)$.

Questão 15. *Sejam (u, v) as coordenadas obtidas fazendo uma translação do sistema de coordenadas (x, y). A origem O' do sistema de coordenadas (u, v) é o ponto de coordenadas $(x, y) = (1, -1)$. Como se escreve a equação $2x^2 + y^2 - 4x + 2y - 1 = 0$ nas coordenadas (u, v)?*

(a) $2u^2 + v^2 - 1 = 0$;
(b) $2u^2 + v^2 - 4 = 0$;
(c) $u^2 + 2v^2 - 4 = 0$;
(d) $2u^2 + v^2 + uv - 4 = 0$;
(e) $2u^2 + 2v^2 - 4 = 0$.

Questão 16. *Determine a posição relativa das esferas*

$$S_1 : (x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 1, \quad e \quad S_2 : (x-2)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 4.$$

(a) $S_1 \cap S_2$ é uma circunferência de raio $r > 2$;
(b) $S_1 \cap S_2$ é uma circunferência de raio $r < 1$;
(c) $S_1 \cap S_2 = \emptyset$;
(d) S_1 e S_2 são tangentes;
(e) $S_1 \cap S_2$ é uma circunferência de raio $1 < r < 2$.

Questão 17. *Determine o foco da parábola $8x + 18y^2 = 0$.*

(a) $(-\frac{1}{4}, 0)$;
(b) $(0, -\frac{1}{9})$;
(c) $(0, -\frac{1}{4})$;
(d) $(\frac{1}{9}, -\frac{1}{4})$;
(e) $(-\frac{1}{9}, 0)$.

Questão 18. *Determine a equação da esfera com centro no ponto $C = (1, 2, -1)$ e tangente ao plano $\pi : 2x - 2y + z = 0$.*

(a) $x^2 + y^2 + z^2 - 10 = 0$;
(b) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 2z + 6 = 0$;
(c) $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 2z + 5 = 0$;
(d) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 2z + 5 = 0$;
(e) $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 2z + 6 = 0$.

Questão 19. *Sejam (u, v) as coordenadas obtidas fazendo uma rotação (no sentido anti-horário) de $\theta = \frac{\pi}{4}$ do sistema de coordenadas (x, y). Como se escreve a equação $2x^2 + 2y^2 - xy - 1 = 0$ nas coordenadas (u, v)?*

(a) $\frac{5}{2}u^2 + \frac{3}{2}v^2 - 1 = 0$;
(b) $-\frac{5}{2}u^2 + \frac{3}{2}v^2 - 1 = 0$;
(c) $\frac{5}{2}u^2 - \frac{3}{2}v^2 - 1 = 0$;
(d) $\frac{5}{2}u^2 + \frac{5}{2}v^2 - 1 = 0$;
(e) $\frac{3}{2}u^2 + \frac{3}{2}v^2 - 1 = 0$.

Questão 20. *Determine a equação das esferas S_+ e S_- de raio $R = 2\sqrt{3}$ que são tangentes ao plano $\pi : x - y + z = 1$ no ponto $P = (0, 0, 1)$*

(a) $S_\pm : (x \pm 3)^2 + (y \mp 2)^2 + (z \pm 2)^2 = 12$;
(b) $S_+ : (x - 3)^2 + (y + 3)^2 + (z - 2)^2 = 12$,
$S_- : (x + 2)^2 + (y - 2)^2 + (z - 21)^2 = 12$;
(c) $S_+ : (x - 2)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 12$,
$S_- : (x + 2)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 12$;
(d) $S_\pm : (x \pm 2)^2 + (y \mp 2)^2 + (z \pm 3)^2 = 12,$;
(e) $S_+ : (x - 3)^2 + (y + 3)^2 + (z - 2)^2 = 2\sqrt{3}$,
$S_- : (x + 2)^2 + (y - 2)^2 + (z - 21)^2 = 2\sqrt{3}$.

MAT 112 — Vetores e Geometria

Turma 2019146

Prof. Paolo Piccione

Prova 2 — $\boxed{\textbf{E}}$

27 de junho de 2019

Nome: ____

Número USP: ____

Assinatura: ____

Folha de Respostas

1	a	b	c	d	e
2	a	b	c	d	e
3	a	b	c	d	e
4	a	b	c	d	e
5	a	b	c	d	e
6	a	b	c	d	e
7	a	b	c	d	e
8	a	b	c	d	e
9	a	b	c	d	e
10	a	b	c	d	e
11	a	b	c	d	e
12	a	b	c	d	e
13	a	b	c	d	e
14	a	b	c	d	e
15	a	b	c	d	e
16	a	b	c	d	e
17	a	b	c	d	e
18	a	b	c	d	e
19	a	b	c	d	e
20	a	b	c	d	e

Deixe em branco.

Corretas	**Erradas**	**Nota**