

MAT 112 — Vetores e Geometria

Prof. Paolo Piccione

27 de junho de 2019

Prova 2 — **D**

2019134

Nome: _____

Número USP: _____

Assinatura: _____

Instruções

- A duração da prova é de **uma hora e quarenta minutos**.
- Assinale as alternativas corretas na **folha de respostas** que está no final da prova. *É permitido deixar questões em branco.*
- Cada questão tem apenas **uma resposta correta**.
- O valor total da prova é de **10** pontos; cada questão correta vale $\frac{1}{2}$ ponto (0.5) e *cada questão errada implica num desconto de $\frac{1}{10}$ de ponto (0.1)*.
- No final da prova, deve ser entregue apenas a folha de respostas (na última página)
- **Boa Prova!**

Terminologia e Notações Utilizadas na Prova

- Todos os sistemas de coordenadas utilizados na prova são ortogonais.
- Para vetores v e w , $v \times w$ denota o produto vetorial de v e w

***NÃO ESQUEÇA DE POR SEU NOME
NA FOLHA DE RESPOSTAS!!!***

Questão 1. *Determine a posição relativa das esferas*

$$S_1 : (x - 1)^2 + y^2 + (z + 1)^2 = 1, \quad e \quad S_2 : (x - 2)^2 + (y - 2)^2 + z^2 = 4.$$

- (a) S_1 e S_2 são tangentes;
- (b) $S_1 \cap S_2$ é uma circunferência de raio $r > 2$;
- (c) $S_1 \cap S_2 = \emptyset$;
- (d) $S_1 \cap S_2$ é uma circunferência de raio $r < 1$;
- (e) $S_1 \cap S_2$ é uma circunferência de raio $1 < r < 2$.

Questão 2. *Determine a equação das esferas S_+ e S_- de raio $R = 2\sqrt{3}$ que são tangentes ao plano $\pi : x - y + z = 1$ no ponto $P = (0, 0, 1)$*

- (a) $S_+ : (x - 3)^2 + (y + 3)^2 + (z - 2)^2 = 12,$
 $S_- : (x + 2)^2 + (y - 2)^2 + (z - 21)^2 = 12;$
- (b) $S_{\pm} : (x \pm 2)^2 + (y \mp 2)^2 + (z \pm 3)^2 = 12,;$
- (c) $S_{\pm} : (x \pm 3)^2 + (y \mp 2)^2 + (z \pm 2)^2 = 12;$
- (d) $S_+ : (x - 2)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 12,$
 $S_- : (x + 2)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 12;$
- (e) $S_+ : (x - 3)^2 + (y + 3)^2 + (z - 2)^2 = 2\sqrt{3},$
 $S_- : (x + 2)^2 + (y - 2)^2 + (z - 21)^2 = 2\sqrt{3}.$

Questão 3. *Sejam (u, v) as coordenadas obtidas fazendo uma rotação (no sentido anti-horário) de $\theta = \frac{\pi}{4}$ do sistema de coordenadas (x, y) . Como se escreve a equação $2x^2 + 2y^2 - xy - 1 = 0$ nas coordenadas (u, v) ?*

- (a) $\frac{3}{2}u^2 + \frac{3}{2}v^2 - 1 = 0;$
- (b) $-\frac{5}{2}u^2 + \frac{3}{2}v^2 - 1 = 0;$
- (c) $\frac{5}{2}u^2 + \frac{5}{2}v^2 - 1 = 0;$
- (d) $\frac{5}{2}u^2 + \frac{3}{2}v^2 - 1 = 0;$
- (e) $\frac{5}{2}u^2 - \frac{3}{2}v^2 - 1 = 0.$

Questão 4. *Sejam (u, v) as coordenadas obtidas fazendo uma translação do sistema de coordenadas (x, y) . A origem O' do sistema de coordenadas (u, v) é o ponto de coordenadas $(x, y) = (1, -1)$. Como se escreve a equação $2x^2 + y^2 - 4x + 2y - 1 = 0$ nas coordenadas (u, v) ?*

- (a) $u^2 + 2v^2 - 4 = 0;$
- (b) $2u^2 + v^2 - 4 = 0;$
- (c) $2u^2 + v^2 + uv - 4 = 0;$
- (d) $2u^2 + 2v^2 - 4 = 0;$
- (e) $2u^2 + v^2 - 1 = 0.$

Questão 5. Calcule a distância do ponto $(1, 1, -1)$ à reta:

$$r : \begin{cases} x - y = 1, \\ x + y - z = 0. \end{cases}$$

- (a) $\frac{7}{2}$;
- (b) $\frac{2}{7}$;
- (c) $\frac{2}{\sqrt{14}}$;
- (d) $\frac{\sqrt{14}}{2}$;
- (e) $\frac{\sqrt{7}}{2}$.

Questão 6. Ache o ângulo θ entre as retas $r : (1, 1, 9) + \lambda(0, 1, -1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, e:

$$s : \begin{cases} x - y = 1, \\ z = 4. \end{cases}$$

- (a) $\theta = \frac{\pi}{3}$;
- (b) $\theta = 0$;
- (c) $\theta = \frac{\pi}{4}$;
- (d) $\theta = \frac{\pi}{2}$;
- (e) $\theta = \frac{\pi}{6}$.

Questão 7. Calcule a distância entre o plano $3x + 2y + z - 2 = 0$ e o ponto $(1, 2, 3)$.

- (a) 8;
- (b) $\frac{8}{\sqrt{14}}$;
- (c) $\frac{10}{\sqrt{14}}$;
- (d) 10;
- (e) $\frac{\sqrt{14}}{8}$.

Questão 8. Calcule o perímetro do triângulo cujos vértices são os pontos médios dos lados do triângulo ABC , sendo $A = (2, 1, 3)$, $B = (4, -1, 1)$ e $C = (0, 1, -1)$.

- (a) $\sqrt{6} + \sqrt{5} + \sqrt{3}$;
- (b) $\sqrt{5} + \sqrt{3} + \sqrt{2}$;
- (c) 16 ;
- (d) 1;
- (e) $\sqrt{12} + \sqrt{20} + \sqrt{24}$.

Questão 9. Determine o foco da parábola $8x + 18y^2 = 0$.

- (a) $(-\frac{1}{4}, 0)$;
- (b) $(\frac{1}{9}, -\frac{1}{4})$;
- (c) $(0, -\frac{1}{9})$;
- (d) $(0, -\frac{1}{4})$;
- (e) $(-\frac{1}{9}, 0)$.

Questão 10. Determine a posição relativa entre a reta r e o plano π :

$$r : \begin{cases} x = 1 - \lambda, \\ y = 2\lambda, \\ z = -1 - \lambda, \end{cases} \quad , \quad \pi : x + y + z = 0.$$

- (a) r intercepta π exatamente em 2 pontos;
- (b) r é ortogonal a π ;
- (c) r intercepta π em um ponto apenas, mas não é ortogonal a π ;
- (d) r está contida em π ;
- (e) r é paralela a π , e $r \cap \pi = \emptyset$.

Questão 11. Determine a equação da esfera com centro no ponto $C = (1, 2, -1)$ e tangente ao plano $\pi : 2x - 2y + z = 0$.

- (a) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 2z + 6 = 0$;
- (b) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 2z + 5 = 0$;
- (c) $x^2 + y^2 + z^2 - 10 = 0$;
- (d) $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 2z + 6 = 0$;
- (e) $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 2z + 5 = 0$.

Questão 12. Determine os planos ortogonais ao vetor $\vec{v} = (2, 3, -6)$ e tangentes à esfera $S : x^2 + y^2 + z^2 - 2x = 0$.

- (a) S não é uma esfera;
- (b) $\pi_1 : -3x - 2y + 6z + 5 = 0$, $\pi_2 : -3x - 2y + 6z - 9 = 0$;
- (c) não existe nenhum plano ortogonal a \vec{v} e tangente a S ;
- (d) $\pi_1 : 3x + 2y - 6z = 0$, $\pi_2 : 3x + 2y - 6z + 5 = 0$;
- (e) $\pi_1 : 2x + 3y - 6z + 5 = 0$, $\pi_2 : 2x + 3y - 6z - 9 = 0$.

Questão 13. Determine os focos da elipse $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$.

- (a) $F_1 = (0, -3)$, $F_2 = (0, 3)$;
- (b) $F_1 = (-3, 0)$, $F_2 = (3, 0)$;
- (c) $F_1 = (0, -2)$, $F_2 = (3, 0)$;
- (d) $F_1 = (0, -2)$, $F_2 = (0, 2)$;
- (e) $F_1 = (-2, 0)$, $F_2 = (2, 0)$.

Questão 14. Determine a posição relativa da reta r e a esfera S :

$$r : \begin{cases} x = 1 + \lambda, \\ y = 2\lambda, \\ z = -1 + \lambda, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad S : x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 3 = 0.$$

- (a) r intercepta S em 2 pontos e passa pelo centro de S ;
- (b) r é tangente a S ;
- (c) r intercepta S e não passa pelo centro de S ;
- (d) $r \cap S = \emptyset$;
- (e) S não é uma esfera.

Questão 15. Sejam (u, v) coordenadas ortogonais no plano obtidas fazendo uma translação do sistema de coordenadas (x, y) , e denote com O' a origem do sistema (u, v) . Sabe-se que, nas coordenadas (u, v) , a equação quadrática $x^2 + xy - 2y^2 + 2x - 3y + 4 = 0$ se transforma numa equação quadrática em (u, v) sem os termos lineares (i.e., de grau 1 em u e v). Calcule as coordenadas (x, y) do ponto O' .

- (a) $O' = \left(\frac{7}{9}, -\frac{8}{9}\right)$;
- (b) $O' = \left(-\frac{5}{9}, -\frac{8}{9}\right)$;
- (c) $O' = \left(-\frac{5}{9}, \frac{8}{9}\right)$;
- (d) $O' = \left(\frac{5}{9}, -\frac{8}{9}\right)$;
- (e) $O' = \left(-\frac{7}{9}, -\frac{8}{9}\right)$.

Questão 16. A reta s passa pelo ponto $P = (2, 2, 3)$ e é perpendicular à reta $r : X = (1, -1, -1) + \lambda(2, 1, -3)$. O ponto onde s intercepta r é:

- (a) $(0, -3, 2)$;
- (b) $(0, 0, 0)$;
- (c) $(0, \frac{-2}{3}, \frac{1}{2})$;
- (d) $(1, 1, 1)$;
- (e) $(0, \frac{-3}{2}, \frac{1}{2})$.

Questão 17. Dado o plano π de equações paramétricas:

$$x = 2 + \lambda - \mu, \quad y = 3 - 2\lambda + \mu, \quad z = -1 + \lambda + \mu,$$

determine a equação geral de π .

- (a) $3x + 2y - z + 11 = 0$;
- (b) $3x - 2y - z - 11 = 0$;
- (c) $3x + 2y + z - 11 = 0$;
- (d) $-3x + 2y - 3z - 15 = 0$;
- (e) $3x - 2y - z + 15 = 0$.

Questão 18. Calcule o raio r da circunferência dada pela interseção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ com o plano $x + y + z = 1$.

- (a) $r = \sqrt{3/2}$;
- (b) $r = 1/\sqrt{3}$;
- (c) $r = \sqrt{2/3}$;
- (d) a interseção da esfera e do plano é vazia;
- (e) $r = \sqrt{5/3}$.

Questão 19. Determine m para que os planos π_1 e π_2 sejam ortogonais:

$$\pi_1 : (1 - m)x - my + z = 0, \quad \pi_2 : (m + 1)x + my - 3 = 0.$$

- (a) $m = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$;
- (b) $m = \pm \frac{1}{2}$;
- (c) não existe algum m que torne os planos π_1 e π_2 ortogonais;
- (d) $m = \pm 1$;
- (e) $m = \pm \sqrt{3}$.

Questão 20. Calcule a distância d entre o ponto $P = (2, 3)$ e o ponto médio do segmento com extremos $A = (5, 1)$ e $B = (1, 3)$.

- (a) $d = 3$;
- (b) $d = 2$;
- (c) $d = \sqrt{2}$;
- (d) $d = 0$;
- (e) $d = \sqrt{3}$.

MAT 112 — Vetores e Geometria

Turma 2019134

Prof. Paolo Piccione

Prova 2 — **D**

27 de junho de 2019

Nome: _____

Número USP: _____

Assinatura: _____

Folha de Respostas

1	a	b	c	d	e
2	a	b	c	d	e
3	a	b	c	d	e
4	a	b	c	d	e
5	a	b	c	d	e
6	a	b	c	d	e
7	a	b	c	d	e
8	a	b	c	d	e
9	a	b	c	d	e
10	a	b	c	d	e
11	a	b	c	d	e
12	a	b	c	d	e
13	a	b	c	d	e
14	a	b	c	d	e
15	a	b	c	d	e
16	a	b	c	d	e
17	a	b	c	d	e
18	a	b	c	d	e
19	a	b	c	d	e
20	a	b	c	d	e

Deixe em branco.

Corretas	Erradas	Nota