

# MAT112 - Vetores e geometria

## Lista de exercícios 8

05.06.2019

**Questão 1** Considere o plano  $\pi : -x + y + z = 3$  e a reta  $r$  paralela ao vetor  $\vec{v} = (-1, 2, 1)$  que passa pelo ponto  $A = (1, 2, 1)$ . Determine as equações das esferas de raio  $\sqrt{5}$  que são tangentes à reta  $r$  no ponto  $A$ , com centro em  $C \in \pi$ .

**Questão 2** Determine as equações das esferas de raio  $\sqrt{17}$  que contêm os pontos  $A = (2, 3, 1)$  e  $(4, 1, 3)$ , com centro no plano  $\pi : 2x + y + z = 3$ .

**Questão 3** Determine as equações das esferas  $S$  de raio  $\sqrt{30}$ , tais que  $S \cap \pi$  é um círculo de raio 3 e centro  $C$  na reta  $r$  onde

$$\pi : x + 2y - 4z = 4 \text{ e } r : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ -x + 2z = 2 \end{cases}$$

**Questão 4** Considere a esfera

$$S : (x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z + 3)^2 = 25$$

a) Determine os centros dos círculos de raio 4, contidas em  $S$  com centro sobre a reta

$$r : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -2 + \lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$$

b) Determine, também, os planos que contêm os círculos encontradas no item anterior.

**Questão 5** Seja  $S$  uma esfera de centro  $C = (2, 1, -1)$  e suponha que o plano  $\pi : x + z + 1 = 0$  seja tangente a  $S$ .

a) Calcule o raio de  $S$ .

b) Calcule o ponto de tangência do plano  $\pi$  com a esfera  $S$ .

c) Determine um plano  $\alpha$  que seja perpendicular a  $\pi$  e tangente a  $S$ .

**Questão 6** *Sejam  $S_1$  e  $S_2$  as esferas abaixo*

$$S_1 : (x - 1)^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1 \text{ e } S_2 : (x - 2)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 1$$

- a) *Mostre que  $S_1 \cap S_2$  é um círculo  $C$ .*  
b) *Determine o centro e o raio do círculo  $C$ , e o plano no qual ele está contido.*

**Questão 7** *Sejam  $S_1$  e  $S_2$  as esferas abaixo*

$$S_1 : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y = 7$$

$$S_2 : x^2 + y^2 + (z - \sqrt{2})^2 = 1$$

- a) *Mostre que  $S_1 \cap S_2$  são tangentes.*  
b) *Determine o ponto de tangência de  $S_1$  e  $S_2$ , e o plano  $\pi$  tangente a  $S_1$  e  $S_2$  neste ponto  $P$ .*

## Respostas

Questão 1:

$$S_1 : (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 5 \text{ e } S_2 : (x+1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 5.$$

Questão 2:

$$S_1 : x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 17 \text{ e } S_2 : (x-2)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 17.$$

Questão 3:

$$S_1 : (x+1)^2 + (y-5)^2 + (z+4)^2 = 30 \text{ e } S_2 : (x+3)^2 + (y-1)^2 + (z-4)^2 = 30.$$

Questão 4:

(a)  $C_1 = (3, -1, -1)$  e  $C_2 = (1, -2, 0)$ .

(b)  $\pi_1 : 2x + y + 2z = 3$  e  $\pi_2 : z = 0$ .

Questão 5: (a)  $R = \sqrt{2}$ .

(b)  $P = (1, 1, -2)$ .

(c)  $\alpha_1 : x - z = 5$  e  $\alpha_2 : x - z = 1$ .

Questão 6:

(a)  $d(C_1, C_2) = \sqrt{3}$ .

(b)  $C = (\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  e  $R = \frac{1}{2}$ .

Questão 7:

(a)  $d(C_1, C_2) = 2$  e  $R_1 = 3 = 1 + 2 = R_2 + d(C_1, C_2)$ .

(b)  $P = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2})$  e  $\pi : -x + y + \sqrt{2}z = 4$ .