MAT0112 - VETORES E GEOMETRIA

LISTA DE EXERCÍCIOS 3

PROF. PAOLO PICCIONE

Exercícios

Questão 1. *O vetor* $\overrightarrow{u} = (1, -1, 3)$ *pode ser escrito como sendo combinação linear de* $\overrightarrow{v} = (-1, 1, 0)$ *e* $\overrightarrow{w} = (2, 3, \frac{1}{3})$*?*

Questão 2. *Escreva* $\overrightarrow{a} = (1, 1, 1)$ *como sendo combinação linear de* $\overrightarrow{u} = (-1, 2, 0)$, $\overrightarrow{v} = (1, 2, 3)$ *e* $\overrightarrow{w} = (0, 2, 1)$.

Questão 3. *Prove que:*
(i) *Se* $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ *são linearmente dependentes(LD) então* $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ *são L.D.*
(ii) *Se* $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ *são linearmente independente(LI) então* $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ *são L.I.*
(iii) $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ *são L.D. se, e somente se* $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v})$ *são L.D.*

Questão 4. *Verifique, justificando, se é verdadeira ou falsa cada afirmação:*
(a) *Se* $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ *é L.D. então* $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ *é L.D.*
(b) *Se* $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ *é L.I. então* $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ *é L.I.*
(c) *Seja* $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ *e* $\overrightarrow{w}$ *são não nulos. Se* $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ *é L.D. então* $(2\overrightarrow{u}, -\overrightarrow{v})$ *é L.D.*
(d) *Se* $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ *é L.I. então* $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ *é L.D.*
(e) $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ *são L.I. se, e somente se* $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v})$ *são L.I.*

Questão 5. *Considere os vetores* $\overrightarrow{u} = (1, 2, 1)_{\mathcal{E}}$ *e* $\overrightarrow{v} = (-1, 1, 0)_{\mathcal{E}}$. *Calcule o cosseno do ângulo entre* $\overrightarrow{u}$ *e* $\overrightarrow{v}$.

Questão 6. *Calcule, em radianos, a medida angular entre* $\overrightarrow{u} = (2, 1, 3)$ *e* $\overrightarrow{v} = (2, 0, -1)$*:*

Questão 7. *Verifique, justificando, se é verdadeira ou falsa cada afirmação:*
Em todos os casos, sejam $\overrightarrow{u} = (x_1, x_2, x_3)$ *e* $\overrightarrow{v} = (y_1, y_2, y_3)$ *vetores em* $\mathbb{R}^3$ *e o produto vetorial de* $\overrightarrow{u}$ *por* $\overrightarrow{v}$ *definido como o vetor:*

$$\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = (x_2 y_3 - x_3 y_2, x_3 y_1 - x_1 y_3, x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

(a) $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = -\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u}$
(b) $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ *é ortogonal a* $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$
(c) $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = 0$ *se, e somente se,* $\overrightarrow{u}$ *e* $\overrightarrow{v}$ *são L.D.*

Questão 8. *Calcule a área do paralelogramo determinado pelos vetores* $\overrightarrow{u} = (1, 2, 1)_{\mathcal{E}}$ *e* $\overrightarrow{v} = (1, 0, 1)_{\mathcal{E}}$.

Questão 9. *Prove que para todo número natural n, temos que a norma do vetor* $\overrightarrow{v} = (n, n+1, n(n+1)) \in \mathbb{R}^3$ *é um número natural.*

Questão 10. *Construa uma família ortonormal* e_1, e_2, e_3 *aplicando o método de Gram-Schmidt para os vetores* $\overrightarrow{u} = (-1, 2, 0)$, $\overrightarrow{v} = (1, 2, 3)$ *e* $\overrightarrow{w} = (0, 2, 1)$.

Questão 11. *Considere a base* $B = (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3})$ *formada pelos vetores* $\overrightarrow{v_1} = (1, 0, 1)_{\mathcal{E}}$, $\overrightarrow{v_2} = (1, 1, 0)_{\mathcal{E}}$ *e* $\overrightarrow{v_3} = (0, 0, 1)_{\mathcal{E}}$, *onde* $\mathcal{E}$ *denota a base canônica. Seja* $(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}, \overrightarrow{w_3})$ *base ortonomal obtida de* B *pelo método de Gram-Schmidt. Calcule* $(\overrightarrow{w_2}$.

Questão 12. *Determine x de modo que $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ sejam ortogonais:*
(a) $\overrightarrow{u} = (x, 0, 3)$ *e* $\overrightarrow{v} = (1, x, 3)$
(b) $\overrightarrow{u} = (x, x, 4)$ *e* $\overrightarrow{v} = (4, x, 1)$

Questão 13. *Determine α, β e γ de forma tal que os vetores $(1, \alpha, 1)_{\mathcal{E}}$,$(\beta, 0, 1)_{\mathcal{E}}$ e $(1, 1, \gamma)_{\mathcal{E}}$ formem uma base ortogonal de $\mathbb{V}^3$.*

Questão 14. *Calcule a projeção ortogonal de $\overrightarrow{v}$ sobre $\overrightarrow{u}$ em cada caso:*
(a) $\overrightarrow{v} = (1, -1, 2)$ *e* $\overrightarrow{u} = (3, -1, 1)$
(b) $\overrightarrow{v} = (-1, 1, 1)$ *e* $\overrightarrow{u} = (-2, 1, 2)$
(c) $\overrightarrow{v} = (1, 3, 5)$ *e* $\overrightarrow{u} = (-3, 1, 0)$
(d) $\overrightarrow{v} = (1, 2, -1)$ *e* $\overrightarrow{u} = (-2, 1, 1)$

Questão 15. *Verifique se a afirmação abaixo é verdadeira ou falsa:*
(a) $proj_{\overrightarrow{v}}^{.proj_{\overrightarrow{u}}^{\overrightarrow{v}}} = \frac{(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})^2}{||\overrightarrow{u}||^2 ||\overrightarrow{v}||^2} \overrightarrow{v}$