MAT0112 - VETORES E GEOMETRIA

LISTA DE EXERCÍCIOS 1

PROF. PAOLO PICCIONE

Proposição 1. *A relação de equipolência é uma relação de equivalência, isto é, quaisquer que sejam os segmentos orientados* (A, B), (C, D) *e* (E, F) :

(i) $(A, B) \sim (A, B)$ *(propriedade reflexiva)*

(ii) $(A, B) \sim (C, D) \Rightarrow (C, D) \sim (A, B)$ *(propriedade simétrica)*

(iii) $(A, B) \sim (C, D)$ *e* $(C, D) \sim (E, F) \Rightarrow (A, B) \sim (E, F)$ *(propriedade transitiva)*

Questão 1. *Prove então que se* $[(A, B) \sim (P, Q)$ *e* $(C, D) \sim (P, Q)]$ *então* $(A, B) \sim (C, D)$.

Questão 2. *Seja* $X = \mathbb{Z}$ *o conjunto dos números inteiros. Para os conjuntos* $R \subset X \times X$ *aqui em baixo, determine quais são relações de equivalência, e nesse caso, descreva as classes de equivalência.*

(a) $R = \big\{(n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : n - m \geq 1\big\}$

(b) $R = \big\{(n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : n - m$ *é múltiplo de* $7\big\}$

(c) $R = \big\{(n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : n + m$ *é múltiplo de* $7\big\}$

(d) $R = \big\{(n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : n - 2m$ *é múltiplo de* $5\big\}$

(e) $R = \big\{(n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : n \geq m\big\}$

Questão 3. *Qual a classe de congruência módulo* x *do inteiro* y *quando?*

(a) $x = 2$ *e* $y = 10$

(b) $x = 7$ *e* $y = 11$

(c) $x = 7$ *e* $y = -11$

(d) $x = 5$ *e* $y = -20$

Questão 4. *Prove que,* $\overrightarrow{u} = -\overrightarrow{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$

Questão 5. *Verifique, justificando, se é verdadeira ou falsa cada afirmação:*
(i)( ) *Se* $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}$ *então* $||\overrightarrow{u}|| = ||\overrightarrow{v}||$
(ii)( ) *Se* $||\overrightarrow{u}|| = ||\overrightarrow{v}||$ *então* $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}$
(iii)( ) *Se* $\overrightarrow{u} // \overrightarrow{v}$ *então* $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}$
(iv)( ) *Se* $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}$ *então* $\overrightarrow{u} // \overrightarrow{v}$.
(v)( ) *Se* $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ *então* $AC \cap BD = \emptyset$

Questão 6. *Verifique, justificando, se é verdadeira ou falsa cada afirmação:*
(i)( ) $||\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}|| = ||\overrightarrow{u}|| + ||\overrightarrow{v}||$ *para quaisquer* $\overrightarrow{u}$ *e* $\overrightarrow{v}$.
(ii)( ) $||\overrightarrow{u} - \overrightarrow{w}|| = ||\overrightarrow{u}|| - ||\overrightarrow{w}||$ *para quaisquer* $\overrightarrow{u}$ *e* $\overrightarrow{w}$.

Questão 7. *Quais são a origem e a extremidade de um representante do vetor* $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{GH} - \overrightarrow{FA} - \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{FB}$?

Questão 8. *Determine a origem A do segmento que representa o vetor $\overrightarrow{u} = (2, 3, -1)$, sendo sua extremidade o ponto $B = (0, 4, 2)$.*

Questão 9. *Mostre que, se $\overrightarrow{v}$ é um vetor não-nulo, então $\overrightarrow{v}$ e seu versor, $\frac{\overrightarrow{v}}{||\overrightarrow{v}||}$, são paralelos, de mesmo sentido, e que o versor de $\overrightarrow{v}$ tem norma 1.*

Questão 10. *O hexágono $ABCDEF$ é regular, de centro O. Prove que $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF} = 6\overrightarrow{AO}$.*

Questão 11. *Sejam M,N,P os pontos médios dos lados AB,BC, AC de um triangulo ABC, respectivamente. Mostre que,*

$$\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{0}$$

Questão 12. *Seja $ABCD$ um quadrilátero, e O um ponto qualquer. Seja P o ponto médio do segmento que une os pontos médios das diagonais AC e BD. Prove que*

$$P = O + \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$$

Questão 13. *Sejam A, B, C, D pontos quaisquer, M e Npontos médios de $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$ respectivamente. Considere $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}$. Exprima $\overrightarrow{x}$ em função de $\overrightarrow{MN}$.*

Questão 14. *Os pontos A, B, C E D são tais que $A \neq B$, $C \neq D$, e as retas AB e CD não são paralelas. Prove que se $\alpha\overrightarrow{AB} = \beta\overrightarrow{CD}$ então $\alpha = \beta = 0$.*

Questão 15. *Prove que, se $A + \overrightarrow{u} = B + \overrightarrow{v}$então $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{v}$.*

Questão 16. *Dados os pontos A, B e C. Sabendo que $(A + \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{CX} = C + \overrightarrow{CB}$, determine X.*

Questão 17. *Prove que, se $B = A + \overrightarrow{DC}$, então $B = C + \overrightarrow{DA}$.*

Questão 18. *Seja r a razão em que o ponto P divide o segmento orientado não-nulo (A, B). Prove que $r \neq -1$ e que $\overrightarrow{AP} = \frac{r}{1+r}\overrightarrow{AB}$.*

Questão 19. *Sejam A, B e C pontos quaisquer, $A \neq B$. Prove que X pertence à reta AB se, e somente se, existem α e β tais que $\overrightarrow{CX} = \alpha\overrightarrow{CA} + \beta\overrightarrow{CB}$ e $\alpha + \beta = 1$.*

Questão 20. *O ponto X divide (A, B) na razão α, Y divide (B, C) na razão β e Z divide (C, A) na razão γ. Exprima $\overrightarrow{CX}$, $\overrightarrow{AY}$ e $\overrightarrow{BZ}$ em função de $\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}, \alpha, \beta$ e γ.*