

MAT 112 — Turma 2019146

Vetores e Geometria

Prof. Paolo Piccione

Prova 1

7 de maio de 2019

Nome: _____

Número USP: _____

Assinatura: _____

Instruções

- A duração da prova é de **uma hora e quarenta minutos**.
- Assinale as alternativas corretas na **folha de respostas** que está no final da prova. *É permitido deixar questões em branco.*
- Cada questão tem apenas **uma resposta correta**.
- O valor total da prova é de **10** pontos; cada questão correta vale $\frac{1}{2}$ ponto (0.5) e *cada questão errada implica num desconto de $\frac{1}{10}$ de ponto* (0.10).
- No final da prova, deve ser entregue apenas a folha de respostas (na última página).
- **Boa Prova!**

Terminologia e Notações Utilizadas na Prova

- Dada uma matriz A , a *transposta* de A será denotada A^t (Questão 17).
- Fixado um inteiro positivo k e dado $n \in \mathbb{Z}$, o símbolo $[n]_k$ denota a *classe de congruência módulo k* de n .
- No texto, $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ denota sempre uma base ortonormal e orientada positivamente de \mathbb{V}^3 .
- Dados vetores \vec{v} e \vec{w} , o produto vetorial de \vec{v} e \vec{w} é denotado por $\boxed{\vec{v} \times \vec{w}}$, e o produto escalar de \vec{v} e \vec{w} é $\boxed{\vec{v} \cdot \vec{w}}$. O comprimento (norma) do vetor \vec{v} é denotado por $\boxed{\|\vec{v}\|}$.

**NÃO ESQUEÇA DE POR SEU NOME
NA FOLHA DE RESPOSTAS!!!**

D

Questão 1. Calcule a projeção ortogonal do vetor $\vec{v} = (1, 2, -1)_E$ na direção do vetor $\vec{w} = (-2, 1, 1)_E$.

- (a) $(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})_E$;
- (b) $(\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{6})_E$;
- (c) $(\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}})_E$;
- (d) $(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}})_E$;
- (e) $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{6})_E$.

Questão 2. Sejam \vec{v} e \vec{w} dois vetores de \mathbb{V}^3 não nulos e ortogonais. Quais das listadas abaixo é uma base ortonormal de \mathbb{V}^3 ?

- (a) $(\frac{1}{\|\vec{v}\|} \vec{v}, \frac{1}{\|\vec{w}\|} \vec{w}, \vec{v} \times \vec{w})$;
- (b) $(\frac{1}{\|\vec{v}\|} \vec{v}, \frac{1}{\|\vec{w}\|} \vec{w}, \frac{1}{\vec{v} \cdot \vec{w}} \vec{v} \times \vec{w})$;
- (c) $(\vec{v}, \vec{w}, (\vec{v} \cdot \vec{w}) \vec{v} \times \vec{w})$;
- (d) $(\frac{1}{\|\vec{v}\|} \vec{v}, \frac{1}{\|\vec{w}\|} \vec{w}, \frac{1}{\|\vec{v}\| \|\vec{w}\|} \vec{v} \times \vec{w})$;
- (e) $(\vec{v}, \vec{w}, \vec{v} \times \vec{w})$.

Questão 3. Calcule o produto misto $(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_3$, onde $\vec{v}_1 = (2, 0, 1)_E$, $\vec{v}_2 = (4, 3, 0)_E$ e $\vec{v}_3 = (-2, 2, -1)_E$.

- (a) -8 ;
- (b) 5 ;
- (c) 0 ;
- (d) -3 ;
- (e) 8 .

Questão 4. Calcule o produto misto $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$ sabendo que $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 2$, $\|\vec{w}\| = 3$, o ângulo entre \vec{u} e \vec{v} é de $\frac{\pi}{4}$ radianos, o ângulo entre \vec{w} e $\vec{u} \times \vec{v}$ é de $\frac{\pi}{3}$ radianos, e sabendo que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é uma base de \mathbb{V}^3 orientada negativamente.

- (a) $-\frac{6}{\sqrt{2}}$;
- (b) $-9\sqrt{3}$;
- (c) $-\frac{6}{\sqrt{3}}$;
- (d) $\frac{6}{\sqrt{2}}$;
- (e) $9\sqrt{3}$.

Questão 5. Analise as afirmações (i), (ii) e (iii) abaixo, coloque (V) para verdadeiro ou (F) para falso e em seguida marque a respectiva sequência correta:

- (i) Seja \vec{v} um vetor em \mathbb{V}^3 , e seja $\vec{u} \in \mathbb{V}^3$ um vetor unitário (i.e., de comprimento 1).
O vetor $\vec{w} = \vec{v} + (\vec{v} \cdot \vec{u})\vec{u}$ é ortogonal a \vec{u} .
- (ii) Se \vec{u} e \vec{v} são linearmente independentes então $\vec{w}_1 = 2\vec{u} + \vec{v}$ e $\vec{w}_2 = 4\vec{u} + 2\vec{v}$ são linearmente independentes.
- (iii) Se E é uma base ortonormal, $\vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\right)_E$ tem norma 1.

- (a) F, F, F;
 (b) V, V, V;
 (c) F, F, V;
 (d) V, V, F;
 (e) F, V, V.

Questão 6. Considere a base $B = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ de \mathbb{V}^3 , onde $\vec{v}_1 = (0, -1, 1)_E$, $\vec{v}_2 = (-2, -1, 0)_E$, e $\vec{v}_3 = (1, -1, 1)_E$. Calcule as componentes $(a, b, c)_B$ na base B do vetor $\vec{v} = (-4, 2, -2)_E$.

- (a) $(-4, 0, 6)_B$;
 (b) $(2, 1, -1)_B$;
 (c) $(4, 2, 2)_B$;
 (d) $(4, -2, 2)_B$;
 (e) $(2, 0, -4)_B$.

Questão 7. Sejam B_1, B_2 e B_3 três bases de \mathbb{V}^3 , e M_1, M_2 as matrizes de mudança de base: $B_1 \xrightarrow{M_1} B_2$, $B_2 \xrightarrow{M_2} B_3$. Assuma $\det(M_1) < 0$ e $\det(M_2) > 0$. Quais das seguintes afirmações é verdadeira?

- (a) A matriz de mudança de base $B_3 \xrightarrow{M} B_1$ é dada por $M = M_2 \times M_1$;
 (b) B_1 e B_3 tem orientação oposta;
 (c) M_2 é a inversa da M_1 ;
 (d) M_1 é a inversa da M_2 ;
 (e) B_1 e B_2 tem a mesma orientação.

Questão 8. Dada a base ortonormal e orientada positivamente $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, calcule $\left(\left((\vec{e}_1 \times \vec{e}_3) \times \vec{e}_1\right) \times \vec{e}_2\right) \times \vec{e}_1$.

- (a) $\vec{0}$;
 (b) $-\vec{e}_3$;
 (c) $-\vec{e}_1$;
 (d) \vec{e}_1 ;
 (e) \vec{e}_2 .

Questão 9. Para quais valores da constante λ os vetores $\vec{v}_1 = (\lambda, 2, -\lambda)_E$, $\vec{v}_2 = (1, \lambda, 1)_E$ e $\vec{v}_3 = (\lambda, 1 - \lambda, 0)_E$ são linearmente dependentes?

- (a) $\lambda = 0, \lambda = -2$;
- (b) $\lambda = 0, 1 \pm \sqrt{5}$;
- (c) $\lambda = 0, \pm 1$;
- (d) $\lambda = \pm \sqrt{5}$;
- (e) $\lambda = 0, \lambda = 2$.

Questão 10. Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, seja $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$ sua matriz inversa. Calcule b_{32} .

- (a) 0;
- (b) 1;
- (c) $\frac{3}{2}$;
- (d) $-\frac{1}{2}$;
- (e) A não admite inversa.

Questão 11. Sejam $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{V}^3$ três vetores. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- (a) $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$ pertence ao espaço gerado por \vec{v} e \vec{w} ;
- (b) $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$ pertence ao espaço gerado por \vec{u} e \vec{w} ;
- (c) $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$ pertence ao espaço gerado por \vec{u} e \vec{v} ;
- (d) $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = -\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$;
- (e) $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$.

Questão 12. Determine α, β e γ de forma tal que os vetores $(1, \alpha, 1)_E$, $(2\beta, 0, 1)_E$ e $(1, 1, -\gamma)_E$ formem uma base ortogonal de \mathbb{V}^3 .

- (a) $\alpha = -2, \beta = 1, \gamma = 1$;
- (b) $\alpha = 2, \beta = -1, \gamma = 1$;
- (c) $\alpha = -1, \beta = 1, \gamma = -1$;
- (d) $\alpha = -2, \beta = -\frac{1}{2}, \gamma = -1$;
- (e) $\alpha = 2, \beta = 1, \gamma = -1$.

Questão 13. Qual é a classe de congruência módulo 9 do inteiro -16 ?

- (a) $[1]_9$;
- (b) $[3]_9$;
- (c) $[2]_9$;
- (d) $[4]_9$;
- (e) $[7]_9$.

Questão 14. *Sejam \vec{v}, \vec{w} vetores não nulos de \mathbb{V}^3 , com $\|\vec{v}\| = 2$, $\|\vec{w}\| = 3$, e o ângulo entre \vec{v} e \vec{w} é $\theta = \frac{\pi}{3}$ radianos. Calcule $\|(\vec{v} \times \vec{w}) \times \vec{w}\|$.*

- (a) $9\sqrt{3}$;
- (b) $6\sqrt{3}$;
- (c) $\frac{9}{\sqrt{2}}$;
- (d) $9\sqrt{2}$;
- (e) $\frac{6}{\sqrt{2}}$.

Questão 15. *Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, calcule sua matriz inversa A^{-1} .*

- (a) A não admite inversa;
- (b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$;
- (c) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$;
- (d) $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$;
- (e) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$.

Questão 16. *Calcule a área do paralelogramo determinado pelos vetores $\vec{v} = (2, 1, 1)_E$ e $\vec{w} = (0, 1, 2)_E$.*

- (a) $2\sqrt{2}$;
- (b) $\sqrt{17}$;
- (c) 1;
- (d) $3\sqrt{2}$;
- (e) $\sqrt{21}$.

Questão 17. *Sejam E_1 e E_2 duas bases ortonormais de \mathbb{V}^3 , com orientação oposta, e A a matriz de mudança de base de E_1 para E_2 . Qual das seguintes identidades é satisfeita por A ?*

- (a) $A - A^t = A^{-1}$;
- (b) $A^t = A$;
- (c) $A^t = A^{-1}$;
- (d) $\det(A) = 1$;
- (e) $A^t = -A^{-1}$.

Questão 18. Qual das seguintes identidades é verdadeira para toda tripla de vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in \mathbb{V}^3$?

- (a) $(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_3 = (\vec{v}_3 \times \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_1$;
- (b) $(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_3 = -(\vec{v}_3 \times \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_1$;
- (c) $(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_3 = (\vec{v}_1 \times \vec{v}_3) \cdot \vec{v}_2$;
- (d) $(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_3 = (\vec{v}_2 \times \vec{v}_1) \cdot \vec{v}_3$;
- (e) $(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_3 = -(\vec{v}_3 \times \vec{v}_1) \cdot \vec{v}_2$.

Questão 19. Seja $B = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ uma base de \mathbb{V}^3 , tal que as seguintes identidades valem:

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0, \quad \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3 = 1, \quad \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3 = -1, \quad \|\vec{v}_1\|^2 = 2, \quad \|\vec{v}_2\|^2 = 1, \quad \|\vec{v}_3\|^2 = 3.$$

Calcule o produto escalar $\vec{v} \cdot \vec{w}$, onde $\vec{v} = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})_B$ e $\vec{w} = (-1, 2, 3)_B$.

- (a) -2 ;
- (b) 4 ;
- (c) 3 ;
- (d) 0 ;
- (e) -3 .

Questão 20. Calcule $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

- (a) -8 ;
- (b) 10 ;
- (c) 0 ;
- (d) 12 ;
- (e) -11 .

MAT 112
Vetores e Geometria
Prof. Paolo Piccione
Prova 1
07 de maio de 2019

Nome: _____

Número USP: _____

Assinatura: _____

Folha de Respostas **D**

Turma: 2019146

1	a	b	c	d	e
2	a	b	c	d	e
3	a	b	c	d	e
4	a	b	c	d	e
5	a	b	c	d	e
6	a	b	c	d	e
7	a	b	c	d	e
8	a	b	c	d	e
9	a	b	c	d	e
10	a	b	c	d	e
11	a	b	c	d	e
12	a	b	c	d	e
13	a	b	c	d	e
14	a	b	c	d	e
15	a	b	c	d	e
16	a	b	c	d	e
17	a	b	c	d	e
18	a	b	c	d	e
19	a	b	c	d	e
20	a	b	c	d	e

Deixe em branco.

Corretas	Erradas	Nota