MAT 112 — Turma 2019146

Vetores e Geometria

Prof. Paolo Piccione

Prova 1

7 de maio de 2019

Nome: ____

Número USP: ____

Assinatura: ____

Instruções

- A duração da prova é de **uma hora e quarenta minutos**.
- Assinale as alternativas corretas na **folha de respostas** que está no final da prova. *É permitido deixar questões em branco.*
- Cada questão tem apenas **uma resposta correta**.
- O valor total da prova é de **10** pontos; cada questão correta vale $\mathbf{\frac{1}{2}}$ ponto (0.5) e *cada questão errada implica num desconto de* $\mathbf{\frac{1}{10}}$ *de ponto* (0.10).
- No final da prova, deve ser entregue apenas a folha de respostas (na última página).
- **Boa Prova!**

Terminologia e Notações Utilizadas na Prova

- Dada uma matriz A, a *transposta* de A será denotada A^{t} (Questão 11).
- Fixado um inteiro positivo k e dado $n \in \mathbb{Z}$, o símbulo $[n]_k$ denota a *classe de congruência módulo k de n*.
- No texto, $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ denota sempre uma base ortonormal e orientada positivamente de $\mathbb{V}^3$.
- Dados vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$, o produto vetorial de $\vec{v}$ e $\vec{w}$ é denotado por $\boxed{\vec{v} \times \vec{w}}$, e o produto escalar de $\vec{v}$ e $\vec{w}$ é $\boxed{\vec{v} \cdot \vec{w}}$. O comprimento (norma) do vetor $\vec{v}$ é denotado por $\boxed{\|\vec{v}\|}$.

NÃO ESQUEÇA DE POR SEU NOME
NA FOLHA DE RESPOSTAS!!!

$\boxed{\mathbf{A}}$

Questão 1. *Dada a matriz* $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, *calcule sua matriz inversa* A^{-1}.

(a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$;

(b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$;

(c) $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$;

(d) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$;

(e) A não admite inversa.

Questão 2. *Calcule a área do paralelogramo determinado pelos vetores* $\vec{v} = (2,1,1)_E$ *e* $\vec{w} = (0,1,2)_E$.

(a) 1;

(b) $3\sqrt{2}$;

(c) $2\sqrt{2}$;

(d) $\sqrt{21}$;

(e) $\sqrt{17}$.

Questão 3. *Sejam* $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{V}^3$ *três vetores. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?*

(a) $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = -\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$;

(b) $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$ pertence ao espaço gerado por $\vec{u}$ e $\vec{w}$;

(c) $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$ pertence ao espaço gerado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$;

(d) $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$;

(e) $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$ pertence ao espaço gerado por $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

Questão 4. *Determine* α, β *e* γ *de forma tal que os vetores* $(1,\alpha,1)_E$, $(2\beta,0,1)_E$ *e* $(1,1,-\gamma)_E$ *formem uma base ortogonal de* $\mathbb{V}^3$.

(a) $\alpha = -1$, $\beta = 1$, $\gamma = -1$;

(b) $\alpha = 2$, $\beta = 1$, $\gamma = -1$;

(c) $\alpha = 2$, $\beta = -1$, $\gamma = 1$;

(d) $\alpha = -2$, $\beta = -\frac{1}{2}$, $\gamma = -1$;

(e) $\alpha = -2$, $\beta = 1$, $\gamma = 1$.

Questão 5. *Seja $B = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ uma base de $\mathbb{V}^3$, tal que as seguintes identidades valem:*

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0,\ \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3 = 1,\ \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3 = -1,\ \|\vec{v}_1\|^2 = 2,\ \|\vec{v}_2\|^2 = 1, \|\vec{v}_3\|^2 = 3.$$

Calcule o produto escalar $\vec{v} \cdot \vec{w}$, onde $\vec{v} = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})_B$ e $\vec{w} = (-1, 2, 3)_B$.

(a) -3;
(b) 0;
(c) 3;
(d) -2;
(e) 4.

Questão 6. *Calcule* $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) 12;
(b) -8;
(c) 10;
(d) 0;
(e) -11.

Questão 7. *Qual das seguintes identidades é verdadeira para toda tripla de vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in \mathbb{V}^3$?*

(a) $(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_3 = -(\vec{v}_3 \times \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_1$;
(b) $(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_3 = (\vec{v}_3 \times \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_1$;
(c) $(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_3 = -(\vec{v}_3 \times \vec{v}_1) \cdot \vec{v}_2$;
(d) $(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_3 = (\vec{v}_1 \times \vec{v}_3) \cdot \vec{v}_2$;
(e) $(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_3 = (\vec{v}_2 \times \vec{v}_1) \cdot \vec{v}_3$.

Questão 8. *Considere a base $B = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ de $\mathbb{V}^3$, onde $\vec{v}_1 = (0, -1, 1)_E$, $\vec{v}_2 = (-2, -1, 0)_E$, e $\vec{v}_3 = (1, -1, 1)_E$. Calcule as componentes $(a, b, c)_B$ na base B do vetor $\vec{v} = (-4, 2, -2)_E$.*

(a) $(4, 2, 2)_B$;
(b) $(2, 1, -1)_B$;
(c) $(2, 0, -4)_B$;
(d) $(-4, 0, 6)_B$;
(e) $(4, -2, 2)_B$.

Questão 9. *Dada a matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$*, seja* $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$ *sua matriz inversa. Calcule* b_{32}*.*

(a) $-\frac{1}{2}$;
(b) 1;
(c) 0;
(d) A não admite inversa;
(e) $\frac{3}{2}$.

Questão 10. *Para quais valores da constante* λ *os vetores* $\vec{v}_1 = (\lambda, 2, -\lambda)_E$*,* $\vec{v}_2 = (1, \lambda, 1)_E$ *e* $\vec{v}_3 = (\lambda, 1-\lambda, 0)_E$ *são linearmente dependentes?*

(a) $\lambda = 0$, $\lambda = -2$;
(b) $\lambda = \pm\sqrt{5}$;
(c) $\lambda = 0$, $\lambda = 2$;
(d) $\lambda = 0, 1 \pm \sqrt{5}$;
(e) $\lambda = 0, \pm 1$.

Questão 11. *Sejam* E_1 *e* E_2 *duas bases ortonormais de* $\mathbb{V}^3$*, com orientação oposta, e* A *a matriz de mudança de base de* E_1 *para* E_2*. Qual das seguintes identidades é satisfeita por* A*?*

(a) $A^{\mathrm{t}} = A^{-1}$;
(b) $A - A^{\mathrm{t}} = A^{-1}$;
(c) $\det(A) = 1$;
(d) $A^{\mathrm{t}} = -A^{-1}$;
(e) $A^{\mathrm{t}} = A$.

Questão 12. *Dada a base ortonormal e orientada postivamente* $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$*, calcule* $\Big(\big((\vec{e}_1 \times \vec{e}_3) \times \vec{e}_1\big) \times \vec{e}_2\Big) \times \vec{e}_1$*.*

(a) $-\vec{e}_1$;
(b) $-\vec{e}_3$;
(c) $\vec{e}_1$;
(d) $\vec{0}$;
(e) $\vec{e}_2$.

Questão 13. *Sejam B_1, B_2 e B_3 três bases de $\mathbb{V}^3$, e M_1, M_2 as matrizes de mudança de base: $B_1 \xrightarrow{M_1} B_2$, $B_2 \xrightarrow{M_2} B_3$. Assuma* $\det(M_1) < 0$ *e* $\det(M_2) > 0$. *Quais das seguintes afirmações é verdadeira?*

(a) B_1 e B_3 tem orientação oposta;
(b) M_2 é a inversa da M_1;
(c) A matriz de mudança de base $B_3 \xrightarrow{M} B_1$ é dada por $M = M_2 \times M_1$;
(d) M_1 é a inversa da M_2;
(e) B_1 e B_2 tem a mesma orientação.

Questão 14. *Calcule o produto misto $(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_3$, onde $\vec{v}_1 = (2, 0, 1)_E$, $\vec{v}_2 = (4, 3, 0)_E$ e $\vec{v}_3 = (-2, 2, -1)_E$.*

(a) 0;
(b) -3;
(c) 8;
(d) 5;
(e) -8.

Questão 15. *Calcule a projeção ortogonal do vetor $\vec{v} = (1, 2, -1)_E$ na direção do vetor $\vec{w} = (-2, 1, 1)_E$.*

(a) $\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}\right)_E$;
(b) $\left(\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)_E$;
(c) $\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)_E$;
(d) $\left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)_E$;
(e) $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{6}\right)_E$.

Questão 16. *Sejam $\vec{v}, \vec{w}$ vetores não nulos de $\mathbb{V}^3$, com $\|\vec{v}\| = 2$, $\|\vec{w}\| = 3$, e o ângulo entre $\vec{v}$ e $\vec{w}$ é $\theta = \frac{\pi}{3}$ radianos. Calcule $\|(\vec{v} \times \vec{w}) \times \vec{w}\|$.*

(a) $9\sqrt{2}$;
(b) $\frac{9}{\sqrt{2}}$;
(c) $9\sqrt{3}$;
(d) $\frac{6}{\sqrt{2}}$;
(e) $6\sqrt{3}$.

Questão 17. *Analise as afirmações* (i), (ii) *e* (iii) *abaixo, coloque* (V) *para verdadeiro ou* (F) *para falso e em seguida marque a respectiva sequência correta:*

(i) *Seja* $\vec{v}$ *um vetor em* $\mathbb{V}^3$, *e seja* $\vec{u} \in \mathbb{V}^3$ *um vetor unitário (i.e., de comprimento* 1*).*
O vetor $\vec{w} = \vec{v} + (\vec{v} \cdot \vec{u})\vec{u}$ *é ortogonal a* $\vec{u}$.

(ii) *Se* $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$ *são linearmente independentes então* $\vec{w}_1 = 2\vec{u} + \vec{v}$ *e* $\vec{w}_2 = 4\vec{u} + 2\vec{v}$ *são linearmente independentes.*

(iii) *Se* E *é uma base ortonormal,* $\vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\right)_E$ *tem norma 1.*

(a) F, F, V;
(b) F, V, V;
(c) F, F, F;
(d) V, V, F;
(e) V, V, V.

Questão 18. *Sejam* $\vec{v}$ *e* $\vec{w}$ *dois vetores de* $\mathbb{V}^3$ *não nulos e ortogonais. Quais das listadas abaixo é uma base ortonormal de* $\mathbb{V}^3$*?*

(a) $\left(\frac{1}{\|\vec{v}\|}\,\vec{v}, \frac{1}{\|\vec{w}\|}\,\vec{w}, \frac{1}{\vec{v}\cdot\vec{w}}\,\vec{v} \times \vec{w}\right)$;
(b) $(\vec{v}, \vec{w}, \vec{v} \times \vec{w})$;
(c) $\left(\frac{1}{\|\vec{v}\|}\,\vec{v}, \frac{1}{\|\vec{w}\|}\,\vec{w}, \vec{v} \times \vec{w}\right)$;
(d) $(\vec{v}, \vec{w}, (\vec{v} \cdot \vec{w})\vec{v} \times \vec{w})$;
(e) $\left(\frac{1}{\|\vec{v}\|}\,\vec{v}, \frac{1}{\|\vec{w}\|}\,\vec{w}, \frac{1}{\|\vec{v}\|\|\vec{w}\|}\,\vec{v} \times \vec{w}\right)$.

Questão 19. *Calcule o produto misto* $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$ *sabendo que* $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 2$, $\|\vec{w}\| = 3$, *o ângulo entre* $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$ *é de* $\frac{\pi}{4}$ *radianos, o ângulo entre* $\vec{w}$ *e* $\vec{u} \times \vec{v}$ *é de* $\frac{\pi}{3}$ *radianos, e sabendo que* $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ *é uma base de* $\mathbb{V}^3$ *orientada negativamente.*

(a) $-\frac{6}{\sqrt{3}}$;
(b) $\frac{6}{\sqrt{2}}$;
(c) $-\frac{6}{\sqrt{2}}$;
(d) $-9\sqrt{3}$;
(e) $9\sqrt{3}$.

Questão 20. *Qual é a classe de congruência módulo* 9 *do inteiro* -16*?*

(a) $[1]_9$;
(b) $[2]_9$;
(c) $[3]_9$;
(d) $[4]_9$;
(e) $[7]_9$.

MAT 112

Vetores e Geometria
Prof. Paolo Piccione
Prova 1
07 de maio de 2019

Nome: ____

Número USP: ____

Assinatura: ____

Folha de Respostas A

Turma: 2019146

1	a	b	c	d	e
2	a	b	c	d	e
3	a	b	c	d	e
4	a	b	c	d	e
5	a	b	c	d	e
6	a	b	c	d	e
7	a	b	c	d	e
8	a	b	c	d	e
9	a	b	c	d	e
10	a	b	c	d	e
11	a	b	c	d	e
12	a	b	c	d	e
13	a	b	c	d	e
14	a	b	c	d	e
15	a	b	c	d	e
16	a	b	c	d	e
17	a	b	c	d	e
18	a	b	c	d	e
19	a	b	c	d	e
20	a	b	c	d	e

Deixe em branco.

Corretas	**Erradas**	**Nota**