MAT 112 — Vetores e Geometria

Prof. Paolo Piccione

02 de julho de 2019

Prova SUB — $\boxed{\textbf{A}}$

Turmas: 2019146 e 2019134

Nome: ____

Número USP: ____

Assinatura: ____

Instruções

- A duração da prova é de **uma hora e quarenta minutos**.
- Assinale as alternativas corretas na **folha de respostas** que está no final da prova. *É permitido deixar questões em branco.*
- Cada questão tem apenas **uma resposta correta**.
- O valor total da prova é de **10** pontos; cada questão correta vale $\frac{1}{2}$ ponto (0.5) e *cada questão errada implica num desconto de* $\frac{1}{10}$ *de ponto* (0.1).
- No final da prova, deve ser entregue apenas a folha de respostas (na última página). Nesta página, cruze sua turma (134 alun@s do IAG, 146 alun@s do BCC)
- **Boa Prova!**

Terminologia e Notações Utilizadas na Prova

- Todos os sistemas de coordenadas utilizados na prova são ortogonais.
- Para vetores v e w, $v \times w$ denota o produto vetorial de v e w

NÃO ESQUEÇA DE POR SEU NOME
NA FOLHA DE RESPOSTAS!!!

Questão 1. *Seja* e_1, e_2, e_3 *uma base ortonormal orientada positivamente. Calcule* $\big((e_3 \times e_1) \times e_1\big) \times e_2$.

(a) e_2;
(b) $-e_1$;
(c) 0;
(d) $-e_3$;
(e) e_1.

Questão 2. *Sejam* $\vec{v}, \vec{w}$ *vetores não nulos de* $\mathbb{V}^3$, *com* $\|\vec{v}\| = 2$, $\|\vec{w}\| = 3$, *e o ângulo entre* $\vec{v}$ *e* $\vec{w}$ *é* $\theta = \frac{\pi}{3}$ *radianos. Calcule* $\|(\vec{v} \times \vec{w}) \times \vec{w}\|$.

(a) $\frac{6}{\sqrt{2}}$;
(b) $9\sqrt{3}$;
(c) $6\sqrt{3}$;
(d) $9\sqrt{2}$;
(e) $\frac{9}{\sqrt{2}}$.

Questão 3. *Dada a matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, *seja* $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$ *sua matriz inversa. Calcule* b_{32}.

(a) A não admite inversa;
(b) $-\frac{1}{2}$;
(c) 0;
(d) 1;
(e) $\frac{3}{2}$.

Questão 4. *Determine a equação das esferas* S_+ *e* S_- *de raio* $R = 2\sqrt{3}$ *que são tangentes ao plano* $\pi : -x + y + z = 1$ *no ponto* $P = (0, 0, 1)$

(a) $S_\pm : (x \pm 2)^2 + (y \mp 2)^2 + (z \pm 3)^2 = 12,;$
(b) $S_\pm : (x \pm 3)^2 + (y \mp 2)^2 + (z \pm 2)^2 = 12;$
(c) $S_+ : (x + 2)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 12,$
$S_- : (x - 2)^2 + (y + 2)^2 + (z + 1)^2 = 12;$
(d) $S_+ : (x - 3)^2 + (y + 3)^2 + (z - 2)^2 = 12,$
$S_- : (x + 2)^2 + (y - 2)^2 + (z - 21)^2 = 12;$
(e) $S_+ : (x - 3)^2 + (y + 3)^2 + (z - 2)^2 = 2\sqrt{3},$
$S_- : (x + 2)^2 + (y - 2)^2 + (z - 21)^2 = 2\sqrt{3}.$

Questão 5. *Calcule a distância d entre o ponto $P = (2,3)$ e o ponto médio do segmento com extremos $A = (6,0)$ e $B = (0,4)$.*

(a) $d = 2$;
(b) $d = \sqrt{3}$;
(c) $d = 3$;
(d) $d = 0$;
(e) $d = \sqrt{2}$.

Questão 6. *Determine a posição relativa entre a reta r e o plano π:*

$$r : \begin{cases} x = 1 - \lambda, \\ y = 2\lambda, \\ z = -1 - \lambda, \end{cases} \quad , \qquad \pi : x + y + z = 1.$$

(a) r é ortogonal a π;
(b) r é paralela a π, e $r \cap \pi = \emptyset$;
(c) r intercepta π exatamente em 2 pontos;
(d) r intercepta π em um ponto apenas, mas não é ortogonal a π;
(e) r está contida em π.

Questão 7. *Calcule o perímetro do triângulo cujos vértices são os pontos médios dos lados do triângulo ABC, sendo $A = (2,1,3)$, $B = (4,-1,1)$ e $C = (0,1,-1)$.*

(a) 16 ;
(b) 1;
(c) $\sqrt{5} + \sqrt{3} + \sqrt{2}$;
(d) $\sqrt{6} + \sqrt{5} + \sqrt{3}$;
(e) $\sqrt{12} + \sqrt{20} + \sqrt{24}$.

Questão 8. *Dada a esfera $S : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 4z + 2 = 0$ e o plano $\pi : 2x + 3y - z = 1$. Podemos afirmar que*

(a) O ponto $C = (1,1,0)$ pertence a esfera S e ao plano π ;
(b) O ponto $C = (1,3,2)$ pertence a esfera S e ao plano π ;
(c) O ponto $C = (3,2,1)$ pertence a esfera S e ao plano π ;
(d) A esfera S tem raio 3.
(e) O ponto $C = (1,1,4)$ pertence a esfera S e ao plano π .

Questão 9. *Determine a equação da esfera com centro no ponto* $C = (1, 2, -1)$ *e tangente ao plano* $\pi : 2x - 2y + z = 0$.

(a) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 2z + 5 = 0$;
(b) $x^2 + y^2 + z^2 - 10 = 0$;
(c) $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 2z + 6 = 0$;
(d) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 2z + 6 = 0$;
(e) $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 2z + 5 = 0$.

Questão 10. *Qual é a classe de congruência módulo* 9 *do inteiro* -25*?*

(a) $[7]_9$;
(b) $[2]_9$;
(c) $[3]_9$;
(d) $[1]_9$;
(e) $[4]_9$.

Questão 11. *Determine os planos ortogonais ao vetor* $\vec{v} = (3, 2, -6)$ *e tangentes à esfera* $S : x^2 + y^2 + z^2 - 2y = 0$.

(a) $\pi_1 : 3x + 2y - 6z = 0$, $\pi_2 : 3x + 2y - 6z + 5 = 0$;
(b) $\pi_1 : 3x + 2y - 6z + 5 = 0$, $\pi_2 : 3x + 2y - 6z - 9 = 0$;
(c) não existe nenhum plano ortogonal a $\vec{v}$ e tangente a S;
(d) $\pi_1 : -3x - 2y + 6z + 5 = 0$, $\pi_2 : -3x - 2y + 6z - 9 = 0$;
(e) S não é uma esfera.

Questão 12. *Determine a equação das esferas* S_+ *e* S_- *com centro na reta* r*, com raio* $R = 2$*, e tangentes ao plano* π*, onde:*

$$r : \begin{cases} x = \lambda, \\ y = \lambda, \\ z = 2\lambda, \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R}, \qquad \pi : x + y + z = 0.$$

(a) $S_\pm : \big(x \pm 1\big)^2 + \big(y \pm 1\big)^2 + (z \pm 2)^2 = 4$;
(b) $S_\pm : \big(x \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\big)^2 + \big(y \pm \sqrt{3}\big)^2 + (z \pm \sqrt{3})^2 = 4$;
(c) $S_\pm : \big(x \pm \sqrt{3}\big)^2 + \big(y \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\big)^2 + (z \pm \sqrt{3})^2 = 4$;
(d) $S_\pm : \big(x \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\big)^2 + \big(y \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\big)^2 + \big(z \pm \sqrt{3}\big)^2 = 4$;
(e) $S_\pm : \big(x \pm \frac{1}{2}\big)^2 + \big(y \pm \frac{1}{2}\big)^2 + (z \pm 1)^2 = 4$.

Questão 13. *Determine o coeficiente* β *de forma que a elipse* $\frac{x^2}{4} + \beta y^2 = 1$ *tenha um foco no ponto* $(0, -2)$.

(a) $\beta = \dfrac{1}{8}$;

(b) $\beta = 8$;

(c) $\beta = \dfrac{1}{13}$;

(d) $\beta = \dfrac{1}{\sqrt{8}}$;

(e) $\beta = \dfrac{1}{\sqrt{13}}$.

Questão 14. *Determine o foco da parábola* $4x + 9y^2 = 0$.

(a) $(-\frac{1}{9}, 0)$;

(b) $(0, -\frac{1}{4})$;

(c) $(0, -\frac{1}{9})$;

(d) $(-\frac{1}{4}, 0)$;

(e) $(\frac{1}{9}, -\frac{1}{4})$.

Questão 15. *Determine a posição relativa da reta* r *e a esfera* S*:*

$$r : \begin{cases} x = 1 + \lambda, \\ y = 2\lambda, \\ z = -1 + \lambda, \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R}, \qquad S : x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 8 = 0.$$

(a) r intercepta S e não passa pelo centro de S;

(b) S não é uma esfera;

(c) r é tangente a S;

(d) $r \cap S = \emptyset$;

(e) r intercepta S em 2 pontos e passa pelo centro de S.

Questão 16. *Dado o plano* π *de equações paramétricas:*

$$x = 3 - 2\lambda + \mu, \quad y = 2 + \lambda - \mu, \quad z = -1 + \lambda + \mu,$$

determine a equação geral de π.

(a) $2x - 3y - z + 11 = 0$;

(b) $2x + 3y - z + 11 = 0$;

(c) $2x + 3y + z - 11 = 0$;

(d) $-2x + 3y - z - 11 = 0$;

(e) $2x + 3y - 3z - 15 = 0$.

Questão 17. *Analise as afirmações* (i), (ii) *e* (iii) *abaixo, coloque* (V) *para verdadeiro ou* (F) *para falso e em seguida marque a respectiva sequência correta:*

(i) *Seja $\vec{v}$ um vetor em $\mathbb{V}^3$, e seja $\vec{u} \in \mathbb{V}^3$ um vetor unitário (i.e., de comprimento 1).*
O vetor $\vec{w} = \vec{v} + (\vec{v} \cdot \vec{u})\vec{u}$ é ortogonal a $\vec{u}$.

(ii) *Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são linearmente independentes então $\vec{w}_1 = 2\vec{u} + \vec{v}$ e $\vec{w}_2 = 4\vec{u} + 2\vec{v}$ são linearmente independentes.*

(iii) *Se E é uma base ortonormal, $\vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\right)_E$ tem norma 1.*

(a) F, V, V;
(b) V, V, F;
(c) V, V, V;
(d) F, F, V;
(e) F, F, F.

Questão 18. *Determine m para que os planos π_1 e π_2 sejam ortogonais:*

$$\pi_1 : mx + (m+1)y + 2 = 0, \quad \pi_2 : mx + (m-1)y + z = 0.$$

(a) $m = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$;
(b) não existe algum m que torne os planos π_1 e π_2 ortogonais;
(c) $m = \pm\sqrt{3}$;
(d) $m = \pm\frac{1}{2}$;
(e) $m = \pm 1$.

Questão 19. *A reta s passa pelo ponto $P = (2, 2, 3)$ e é perpendicular à reta $r : X = (1, 1, 1) + \lambda(2, 1, -3)$. O ponto onde s intercepta r é:*

(a) $\left(\frac{8}{7}, \frac{11}{14}, \frac{23}{14}\right)$;
(b) $\left(\frac{4}{7}, \frac{11}{14}, \frac{23}{14}\right)$;
(c) $\left(\frac{4}{7}, -\frac{11}{14}, -\frac{23}{14}\right)$;
(d) $\left(-\frac{8}{7}, \frac{11}{14}, \frac{23}{14}\right)$;
(e) $\left(-\frac{4}{7}, \frac{11}{14}, \frac{23}{14}\right)$.

Questão 20. *Calcule a área do triângulo com vértices nos pontos* $A = (2,4,2)$, $B = (4,2,0)$ *e* $C = (0,2,4)$.

(a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$;

(b) $\frac{1}{4}$;

(c) $2\sqrt{2}$;

(d) $4\sqrt{2}$;

(e) 4.

MAT 112 — Vetores e Geometria – Prof. Paolo Piccione
Turmas Turmas: 2019146 e 2019134

Prova SUB — $\boxed{\textbf{A}}$

2 de julho de 2019

Nome: ____

Número USP: ____

Assinatura: ____

Turma: $\boxed{134}$ ou $\boxed{146}$

Folha de Respostas

1	a	b	c	d	e
2	a	b	c	d	e
3	a	b	c	d	e
4	a	b	c	d	e
5	a	b	c	d	e
6	a	b	c	d	e
7	a	b	c	d	e
8	a	b	c	d	e
9	a	b	c	d	e
10	a	b	c	d	e
11	a	b	c	d	e
12	a	b	c	d	e
13	a	b	c	d	e
14	a	b	c	d	e
15	a	b	c	d	e
16	a	b	c	d	e
17	a	b	c	d	e
18	a	b	c	d	e
19	a	b	c	d	e
20	a	b	c	d	e

Deixe em branco.

Corretas	Erradas	Nota