

MAT112 - Vetores e geometria

Lista de exercícios 8

20/06/2018

Questão 1 Considere o plano $\pi : -x + y + z = 3$ e a reta r paralela ao vetor $\vec{v} = (-1, 2, 1)$ que passa pelo ponto $A = (1, 2, 1)$. Determine as equações das esferas de raio $\sqrt{5}$ que são tangentes à reta r no ponto A , com centro em $C \in \pi$.

Questão 2 Determine as equações das esferas de raio $\sqrt{17}$ que contêm os pontos $A = (2, 3, 1)$ e $(4, 1, 3)$, com centro no plano $\pi : 2x + y + z = 3$.

Questão 3 Determine as equações das esferas S de raio $\sqrt{30}$, tais que $S \cap \pi$ é um círculo de raio 3 e centro C na reta r onde

$$\pi : x + 2y - 4z = 4 \text{ e } r : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ -x + 2z = 2 \end{cases}$$

Questão 4 Considere a esfera

$$S : (x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z + 3)^2 = 25$$

a) Determine os centros dos círculos de raio 4, contidas em S com centro sobre a reta

$$r : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -2 + \lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$$

b) Determine, também, os planos que contêm os círculos encontrados no item anterior.

Questão 5 Seja S uma esfera de centro $C = (2, 1, -1)$ e suponha que o plano $\pi : x + z + 1 = 0$ seja tangente a S .

a) Calcule o raio de S .

b) Calcule o ponto de tangência do plano π com a esfera S .

c) Determine um plano α que seja perpendicular a π e tangente a S .

Questão 6 *Sejam S_1 e S_2 as esferas abaixo*

$$S_1 : (x - 1)^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1 \text{ e } S_2 : (x - 2)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 1$$

- a) *Mostre que $S_1 \cap S_2$ é um círculo C .*
b) *Determine o centro e o raio do círculo C , e o plano no qual ele está contido.*

Questão 7 *Sejam S_1 e S_2 as esferas abaixo*

$$S_1 : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y = 7$$

$$S_2 : x^2 + y^2 + (z - \sqrt{2})^2 = 1$$

- a) *Mostre que $S_1 \cap S_2$ são tangentes.*
b) *Determine o ponto de tangência de S_1 e S_2 , e o plano π tangente a S_1 e S_2 neste ponto P .*

Respostas

Questão 1:

$$S_1 : (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 5 \text{ e } S_2 : (x+1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 5.$$

Questão 2:

$$S_1 : x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 17 \text{ e } S_2 : (x-2)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 17.$$

Questão 3:

$$S_1 : (x+1)^2 + (y-5)^2 + (z+4)^2 = 30 \text{ e } S_2 : (x+3)^2 + (y-1)^2 + (z-4)^2 = 30.$$

Questão 4:

(a) $C_1 = (3, -1, -1)$ e $C_2 = (1, -2, 0)$.

(b) $\pi_1 : 2x + y + 2z = 3$ e $\pi_2 : z = 0$.

Questão 5: (a) $R = \sqrt{2}$.

(b) $P = (1, 1, -2)$.

(c) $\alpha_1 : x - z = 5$ e $\alpha_2 : x - z = 1$.

Questão 6:

(a) $d(C_1, C_2) = \sqrt{3}$.

(b) $C = (\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ e $R = \frac{1}{2}$.

Questão 7:

(a) $d(C_1, C_2) = 2$ e $R_1 = 3 = 1 + 2 = R_2 + d(C_1, C_2)$.

(b) $P = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2})$ e $\pi : -x + y + \sqrt{2}z = 4$.