

MAT 112 — Turma 2018134

Vetores e Geometria

Prof. Paolo Piccione

Prova 2

28 de junho de 2018

Nome: _____

Número USP: _____

Assinatura: _____

Instruções

- A duração da prova é de **uma hora e quarenta minutos**.
- Assinale as alternativas corretas na **folha de respostas** que está no final da prova.
É permitido deixar questões em branco.
- Cada questão tem apenas **uma resposta correta**.
- O valor total da prova é de **10** pontos; cada questão correta vale $\frac{1}{2}$ ponto (0.5) e, **caso houver mais de três respostas erradas**, *cada questão errada implica num desconto de $\frac{1}{10}$ de ponto* (0.10).
- No final da prova, deve ser entregue apenas a folha de respostas (na última página).
- **Boa Prova!**

Terminologia e Notações Utilizadas na Prova

- \mathbb{E}^2 e \mathbb{E}^3 denotam respectivamente o plano e o espaço euclidiano.
- Onde não especificado diversamente, todos os sistemas de coordenadas em \mathbb{E}^2 e em \mathbb{E}^3 são ortonormais.

***NÃO ESQUEÇA DE POR SEU NOME
NA FOLHA DE RESPOSTAS!!!***

C

Questão 1. Determine a posição relativa das retas r e s dadas por:

$$r : (3, 0, 2) + \lambda(2, 1, 3) \quad e \quad s : (5, 2, 5) + \lambda\left(1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

- (a) r e s são paralelas, e $r \neq s$;
- (b) r e s são concorrentes;
- (c) $r = s$;
- (d) $r \cap s$ é um círculo de raio $\frac{1}{2}$;
- (e) r e s são reversas.

Questão 2. Seja S uma esfera de centro $C = (2, 1, -1)$, e suponha que o plano $\pi : y - 2z + 3 = 0$ seja tangente a S . Calcule o raio de S .

- (a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$;
- (b) $\sqrt{3}$;
- (c) $\frac{6}{\sqrt{5}}$;
- (d) $\frac{3}{\sqrt{5}}$;
- (e) $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Questão 3. Determine a equação da esfera S em \mathbb{E}^3 com centro no ponto $C = (1, 1, -2)$ e raio $R = \sqrt{3}$

- (a) $S : x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 4z = 0$;
- (b) $S : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 4z - 3 = 0$;
- (c) $S : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 2z - 3 = 0$;
- (d) $S : x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y + 4z = 0$;
- (e) $S : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 4z + 3 = 0$.

Questão 4. Sejam $S = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ e $S' = (O', \vec{e}'_1, \vec{e}'_2)$ dois sistemas de coordenadas ortogonais no plano (os dois sistemas utilizam a mesma base de \mathbb{V}^2). Denote com (x, y) as coordenadas no sistema S , e com (u, v) as coordenadas no sistema S' . Se $O = (-1, 2)_{S'}$, quais são as equações de mudança de coordenadas corretas?

Note: $(-1, 2)$ são as coordenadas no sistema S' da origem O do sistema S .

- (a) $x = u \cos(1), y = -v \sin(2)$;
- (b) $x = u - 1, y = v - 2$;
- (c) $x = u \cos(1), y = v \sin(2)$;
- (d) $x = u - 1, y = v + 2$;
- (e) $x = u + 1, y = v - 2$.

Questão 5. Calcule a distância entre as retas:

$$\begin{aligned} r_1 &: (2, 1, 0) + \lambda(1, 1, 1) \\ r_2 &: (1, 1, -1) + \lambda(2, 2, 0), \end{aligned} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

- (a) $\frac{3}{\sqrt{2}}$;
- (b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$;
- (c) $\frac{1}{\sqrt{5}}$;
- (d) $\frac{3}{\sqrt{5}}$;
- (e) $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Questão 6. Escreva uma equação cartesiana do plano:

$$\pi : \begin{cases} x = 1 + \lambda + 2\mu \\ y = 2\lambda - \mu \\ z = 3 + \mu \end{cases}$$

- (a) $\pi : 2x + y + 3z + 13 = 0$;
- (b) $\pi : -2x + y - 3z + 13 = 0$;
- (c) $\pi : -2x - y + 3z - 7 = 0$;
- (d) $\pi : 2x + y + 3z - 7 = 0$;
- (e) $\pi : 2x - y - 5z + 13 = 0$.

Questão 7. Entre as esferas concêntricas com a esfera

$$S : x^2 + y^2 + z^2 - 2x = 0$$

encontre aquela tangente ao plano $x = 3$.

- (a) $x^2 + y^2 + z^2 - 3 = 0$;
- (b) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2 = 0$;
- (c) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 3 = 0$;
- (d) $(x - 3)^2 + y^2 + z^2 = 9$;
- (e) A equação dada para S não é a de uma esfera.

Questão 8. Seja S uma esfera de centro $C = (2, 2, 0)$, e suponha que a interseção de S com o plano $\pi : -x + 2y + z = 0$ seja um círculo de raio $r = 2$. Calcule o raio R de S .

- (a) $R = \frac{1}{2}$;
- (b) $R = \sqrt{6}$;
- (c) $R = \frac{1}{5}$;
- (d) $R = \frac{1}{\sqrt{5}}$;
- (e) $R = \sqrt{\frac{14}{3}}$.

Questão 9. Determine a posição relativa das retas de equações vetoriais:

$$\begin{aligned} r_1 &: (3, 2, 1) + \lambda(1, 1, 1) \\ r_2 &: (3, 2, -1) + \lambda(2, 2, 0), \quad \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

- (a) as retas são reversas;
- (b) as retas são paralelas;
- (c) as retas são concorrentes;
- (d) as retas possuem exatamente dois pontos em comum;
- (e) as retas coincidem.

Questão 10. Determine a interseção $S_1 \cap S_2$, onde S_1 e S_2 são as esferas em \mathbb{E}^3 de equação:

$$\begin{aligned} S_1 &: x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y = 0 \\ S_2 &: x^2 + y^2 + z^2 - 8z - 15 = 0. \end{aligned}$$

- (a) $S_1 \cap S_2 = \{P\}$, onde $P = (0, 0, 4)$;
- (b) as equações dadas não correspondem a esferas;
- (c) $S_1 \cap S_2 = \emptyset$;
- (d) $S_1 \cap S_2$ é um círculo de raio $\frac{17}{2}$;
- (e) $S_1 \cap S_2$ é um círculo de raio $\frac{\sqrt{17}}{2}$.

Questão 11. Qual é a posição relativa da reta $r : (1, -2, 3) + \lambda(2, -1, 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, e o plano $\pi : 4x - 2y + 2z - 1 = 0$?

- (a) $r \subset \pi$;
- (b) r é paralela a π , e $r \cap \pi = \emptyset$;
- (c) r é transversal a π ;
- (d) $r \cap \pi$ consiste de dois pontos distintos;
- (e) r é ortogonal a π .

Questão 12. Considere o ponto $A = (1, 2, 1)$ e a reta

$$r : (1, 0, 0) + \lambda(-1, 2, 3), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Determine a equação do plano π que contém a reta r e o ponto A .

- (a) $\pi : x - 2y + 2z = 4$;
- (b) $\pi : x - 7y + 2z = 5$;
- (c) $\pi : x - 3y + 2z = 1$;
- (d) $\pi : 4x - y = 5$;
- (e) $\pi : 4x - y + 2z = 4$.

Questão 13. *Sejam r a reta por P e com a direção do vetor $\vec{v} \in \mathbb{V}^3$, e s a reta por Q e com a direção do vetor $\vec{w} \in \mathbb{V}^3$. Qual das expressões abaixo fornece a distância entre r e s ?*

- (a) $|\vec{PQ} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})|$;
 (b) $\frac{|\vec{PQ} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})|}{\|\vec{v} \times \vec{w}\|}$;
 (c) $\frac{\|\vec{PQ} \times (\vec{v} \times \vec{w})\|}{\|\vec{v} \times \vec{w}\|}$;
 (d) $\frac{|\vec{PQ} \cdot (\vec{v} \cdot \vec{w})|}{\|\vec{v} \times \vec{w}\|}$;
 (e) $\frac{\|\vec{PQ}\| \cdot \|\vec{v} \times \vec{w}\|}{\vec{v} \cdot \vec{w}}$.

Questão 14. *Determine a equação do plano π que contem a reta $r : \begin{cases} x = y \\ z = 1 \end{cases}$ e que passa pelo ponto $P = (1, 2, 3)$.*

- (a) $2x - 2y - 2z + 2 = 0$;
 (b) $2x - 2y + z - 1 = 0$;
 (c) $x - y + z - 1 = 0$;
 (d) $3x - 2y + z + 4 = 0$;
 (e) $2x - 3y + z + 1 = 0$.

Questão 15. *Calcule a distância entre o ponto $P_0 = (0, 1, -2)$ e a reta $r : (1, 2, 1) + \lambda(1, -2, 1)$.*

- (a) $\sqrt{\frac{31}{3}}$;
 (b) $\sqrt{\frac{31}{7}}$;
 (c) $\sqrt{\frac{17}{5}}$;
 (d) $\sqrt{\frac{17}{3}}$;
 (e) $\sqrt{\frac{31}{5}}$.

Questão 16. Considere a cônica de equação $3x^2 - 3xy + y^2 - 2 = 0$ em \mathbb{E}^2 . Sejam (u, v) coordenadas ortonormais no plano obtidas por uma rotação de um ângulo θ do sistema de coordenadas (x, y) . Assuma que no sistema de coordenadas (u, v) a equação da cônica seja da forma $Au^2 + Bv^2 + C = 0$. Calcule a tangente de 2θ .

- (a) $\tan(2\theta) = \frac{5}{2}$;
- (b) $\tan(2\theta) = -\frac{3}{2}$;
- (c) $\tan(2\theta) = -\frac{7}{2}$;
- (d) $\tan(2\theta) = \frac{3}{2}$;
- (e) $\tan(2\theta) = -\frac{5}{2}$.

Questão 17. Calcule a distância entre o ponto $P_0 = (1, -2, -1)$ e o plano $\pi : x - 2y - 3z - 2 = 0$.

- (a) $3\sqrt{\frac{2}{7}}$;
- (b) $\frac{7}{\sqrt{2}}$;
- (c) $-\frac{2}{\sqrt{14}}$;
- (d) $\frac{5}{\sqrt{3}}$;
- (e) $\frac{3}{\sqrt{5}}$.

Questão 18. Que símbolo é este? Σ

- (a) Sigma maiúsculo (alfabeto grego);
- (b) ideograma do cachorro (chinês);
- (c) número 7 (escrita cuneiforme);
- (d) Epsilon maiúsculo (alfabeto grego);
- (e) M deitadus (latim).

Questão 19. O plano $\pi : x + y - z - 2 = 0$ em \mathbb{E}^3 intercepta os eixos cartesianos nos pontos A, B e C . Calcular a área do triângulo ABC .

- (a) $2\sqrt{3}$;
- (b) $3\sqrt{3}$;
- (c) 2;
- (d) $\sqrt{3}$;
- (e) $2\sqrt{2}$.

Questão 20. *Escreva a equação do plano π perpendicular à direção do vetor $\vec{v} = (-2, -2, 2)$ e passante por $P_0 = (-2, -1, 3)$.*

- (a) $\pi : x + y - z - 6 = 0$;
- (b) $\pi : x + y - z + 6 = 0$;
- (c) $\pi : -x + y - z + 6 = 0$;
- (d) $\pi : x - y - z + 6 = 0$;
- (e) $\pi : x + y + z + 6 = 0$.

MAT 112
Vetores e Geometria
Prof. Paolo Piccione
Prova 2
28 de junho de 2018

Nome: _____

Número USP: _____

Assinatura: _____

Folha de Respostas C

Turma: 2018134

1	a	b	c	d	e
2	a	b	c	d	e
3	a	b	c	d	e
4	a	b	c	d	e
5	a	b	c	d	e
6	a	b	c	d	e
7	a	b	c	d	e
8	a	b	c	d	e
9	a	b	c	d	e
10	a	b	c	d	e
11	a	b	c	d	e
12	a	b	c	d	e
13	a	b	c	d	e
14	a	b	c	d	e
15	a	b	c	d	e
16	a	b	c	d	e
17	a	b	c	d	e
18	a	b	c	d	e
19	a	b	c	d	e
20	a	b	c	d	e

Deixe em branco.

Corretas	Erradas	Nota