

MAT 112 — Turma 2018146

Vetores e Geometria

Prof. Paolo Piccione

Prova 1

24 de abril de 2018

Nome: \_\_\_\_\_

Número USP: \_\_\_\_\_

Assinatura: \_\_\_\_\_

### Instruções

- A duração da prova é de **uma hora e quarenta minutos**.
- Assinale as alternativas corretas na **folha de respostas** que está no final da prova. *É permitido deixar questões em branco.*
- Cada questão tem apenas **uma resposta correta**.
- O valor total da prova é de **10** pontos; cada questão correta vale  $\frac{1}{2}$  ponto (0.5) e *cada questão errada implica num desconto de  $\frac{1}{10}$  de ponto* (0.10).
- No final da prova, deve ser entregue apenas a folha de respostas (na última página).
- **Boa Prova!**

### Terminologia e Notações Utilizadas na Prova

- $\mathbb{Z}$  denota o conjunto dos números inteiros.
- Fixado um inteiro positivo  $k$  e dado  $n \in \mathbb{Z}$ , o símbolo  $[n]_k$  denota a *classe de congruência módulo  $k$  de  $n$* .
- No texto,  $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  denota sempre uma base ortonormal e orientada positivamente de  $\mathbb{V}^3$ .
- Dados vetores  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$ , o produto vetorial de  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  é denotado por  $\boxed{\vec{v} \times \vec{w}}$ , e o produto escalar de  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  é  $\boxed{\vec{v} \cdot \vec{w}}$ . O comprimento (norma) do vetor  $\vec{v}$  é denotado por  $\boxed{\|\vec{v}\|}$ .

**NÃO ESQUEÇA DE POR SEU NOME  
NA FOLHA DE RESPOSTAS!!!**

**H**

**Questão 1.** Seja  $B = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$  uma base de  $\mathbb{V}^3$ , tal que as seguintes identidades valem:

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0, \quad \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3 = 1, \quad \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3 = -1, \quad \|\vec{v}_1\|^2 = 2, \quad \|\vec{v}_2\|^2 = 1, \quad \|\vec{v}_3\|^2 = 3.$$

Calcule o produto escalar  $\vec{v} \cdot \vec{w}$ , onde  $\vec{v} = (1, -1, 1)_B$  e  $\vec{w} = (-1, 2, 3)_B$ .

- (a) 8;
- (b) 0;
- (c) 3;
- (d) -3;
- (e) -2.

**Questão 2.** Considere a base  $B = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$  de  $\mathbb{V}^3$ , onde  $\vec{v}_1 = (1, -1, 1)_E$ ,  $\vec{v}_2 = (-2, -1, 0)_E$ , e  $\vec{v}_3 = (0, -1, 1)_E$ . Calcule as componentes  $(a, b, c)_B$  na base  $B$  do vetor  $\vec{v} = (-4, 2, -2)_E$ .

- (a)  $(4, 2, 2)_B$ ;
- (b)  $(4, -2, 2)_B$ ;
- (c)  $(-4, 0, 6)_B$ ;
- (d)  $(2, 1, -1)_B$ ;
- (e)  $(-4, 0, 2)_B$ .

**Questão 3.** Dado um octógono regular  $ABCDEFGH$  no plano, com centro  $O$ , calcule:

$$\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD} + \vec{AE} + \vec{AF} + \vec{AG} + \vec{AH}.$$

- (a)  $6\vec{AF}$ ;
- (b)  $-8\vec{AO}$ ;
- (c)  $8\vec{AO}$ ;
- (d)  $-6\vec{AF}$ ;
- (e) 0.

**Questão 4.** Dada a base ortonormal e orientada positivamente  $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ , calcule  $((\vec{e}_1 \times \vec{e}_3) \times \vec{e}_1) \times \vec{e}_2$ .

- (a)  $-\vec{e}_3$ ;
- (b)  $\vec{e}_2$ ;
- (c)  $-\vec{e}_1$ ;
- (d)  $\vec{e}_1$ ;
- (e) 0.

**Questão 5.** Qual é a classe de congruência módulo 7 do inteiro  $-15$ ?

- (a)  $[4]_7$ ;
- (b)  $[6]_7$ ;
- (c)  $[1]_7$ ;
- (d)  $[2]_7$ ;
- (e)  $[3]_7$ .

**Questão 6.** Considere a base  $B = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$  formada pelos vetores  $\vec{v}_1 = (1, 0, 1)_E$ ,  $\vec{v}_2 = (1, 1, 0)_E$  e  $\vec{v}_3 = (0, 0, 1)_E$ . Seja  $(\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3)$  a base ortonormal obtida de  $B$  pelo método de Gram-Schmidt. Calcule o vetor  $\vec{w}_2$ .

- (a)  $\vec{w}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, -1)_E$ ;
- (b)  $\vec{w}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, -1)_E$ ;
- (c)  $\vec{w}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 2, -1)_E$ ;
- (d)  $\vec{w}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 2, 1)_E$ ;
- (e)  $\vec{w}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1)_E$ .

**Questão 7.** Qual das seguintes identidades é verdadeira para toda tripla de vetores  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in \mathbb{V}^3$ ?

- (a)  $(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_3 = (\vec{v}_2 \times \vec{v}_1) \cdot \vec{v}_3$ ;
- (b)  $(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_3 = -(\vec{v}_3 \times \vec{v}_1) \cdot \vec{v}_2$ ;
- (c)  $(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_3 = (\vec{v}_1 \times \vec{v}_3) \cdot \vec{v}_2$ ;
- (d)  $(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_3 = -(\vec{v}_3 \times \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_1$ ;
- (e)  $(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_3 = (\vec{v}_3 \times \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_1$ .

**Questão 8.** Sejam  $B_1, B_2$  e  $B_3$  três bases de  $\mathbb{V}^3$ , e  $M_1, M_2$  as matrizes de mudança de base:  $B_1 \xrightarrow{M_1} B_2$ ,  $B_2 \xrightarrow{M_2} B_3$ . Assuma  $\det(M_1) < 0$  e  $\det(M_2) < 0$ . Quais das seguintes afirmações é verdadeira?

- (a)  $B_1$  e  $B_2$  tem a mesma orientação;
- (b) A matriz de mudança de base  $B_3 \xrightarrow{M} B_1$  é dada por  $M = M_2 \times M_1$ ;
- (c)  $M_2$  é a inversa da  $M_1$ ;
- (d)  $B_1$  e  $B_3$  tem a mesma orientação;
- (e)  $M_1$  é a inversa da  $M_2$ .

**Questão 9.** Dada a matriz  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ , calcule sua matriz inversa  $A^{-1}$ .

- (a)  $A$  não admite inversa;
- (b)  $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$ ;
- (c)  $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ ;
- (d)  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ ;
- (e)  $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ .

**Questão 10.** Calcule a área do paralelogramo determinado pelos vetores  $\vec{v} = (1, -2, 1)_E$  e  $\vec{w} = (1, 0, -1)_E$ .

- (a)  $3\sqrt{3}$ ;
- (b)  $2\sqrt{2}$ ;
- (c) 1;
- (d) 2;
- (e)  $2\sqrt{3}$ .

**Questão 11.** Calcule a projeção ortogonal do vetor  $\vec{v} = (1, 2, -1)_E$  na direção do vetor  $\vec{w} = (2, -1, -1)_E$ .

- (a)  $(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})_E$ ;
- (b)  $(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}})_E$ ;
- (c)  $(\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}})_E$ ;
- (d)  $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{6})_E$ ;
- (e)  $(\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{6})_E$ .

**Questão 12.** Calcule o produto triplo  $(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_3$ , onde  $\vec{v}_1 = (2, 0, 1)_E$ ,  $\vec{v}_2 = (4, 3, 0)_E$  e  $\vec{v}_3 = (2, -2, 1)_E$ .

- (a) -3;
- (b) -8;
- (c) 0;
- (d) 5;
- (e) 2.

**Questão 13.** *Seja  $\theta$  o ângulo entre os vetores  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$ . Qual é o comprimento do vetor  $(\vec{v} \times \vec{w}) \times \vec{w}$ ?*

- (a)  $\|\vec{v}\|^2 \cdot \|\vec{w}\| \cdot \sin^2 \theta$ ;
- (b)  $\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot |\cos \theta|$ ;
- (c)  $\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|^2 \cdot |\sin \theta \cos \theta|$ ;
- (d)  $\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|^2 \cdot \sin \theta$ ;
- (e)  $\|\vec{v}\|^2 \cdot \|\vec{w}\|^2 \cdot |\cos \theta|$ .

**Questão 14.** *Determine  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  de forma tal que os vetores  $(1, 2\alpha, 1)_E$ ,  $(-\beta, 0, 1)_E$  e  $(1, 1, \gamma)_E$  formem uma base ortogonal de  $\mathbb{V}^3$ .*

- (a)  $\alpha = -1, \beta = 1, \gamma = -1$ ;
- (b)  $\alpha = -1, \beta = 1, \gamma = 1$ ;
- (c)  $\alpha = 2, \beta = 1, \gamma = -1$ ;
- (d)  $\alpha = -2, \beta = 1, \gamma = 1$ ;
- (e)  $\alpha = 2, \beta = -1, \gamma = 1$ .

**Questão 15.** *Analise as afirmações (i), (ii) e (iii) abaixo, coloque (V) para verdadeiro ou (F) para falso e em seguida marque a respectiva sequência correta:*

- (i) *Seja  $\vec{v}$  um vetor em  $\mathbb{V}^3$ , e seja  $\vec{u} \in \mathbb{V}^3$  um vetor unitário (i.e., de comprimento 1).  
O vetor  $\vec{w} = \vec{v} - 2(\vec{v} \cdot \vec{u})\vec{u}$  é ortogonal a  $\vec{u}$ .*
- (ii) *Se  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são linearmente independentes então  $\vec{w}_1 = \vec{u} + \vec{v}$  e  $\vec{w}_2 = \vec{u} - \vec{v}$  são linearmente independentes.*
- (iii) *Se  $E$  é uma base ortonormal,  $\vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\right)_E$  tem norma 1.*

- (a) V, V, V;
- (b) F, F, V;
- (c) V, V, F;
- (d) F, F, F;
- (e) F, V, V.

**Questão 16.** *Sejam  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  vetores linearmente independentes de  $\mathbb{V}^3$  e não ortogonais. Quais das seguintes afirmações é verdadeira?*

- (I) *O produto vetorial  $\vec{v} \times \vec{w}$  é ortogonal ao vetor  $2\vec{v} + 3\vec{w}$ .*
- (II) *Os vetores  $\vec{v}$ ,  $\vec{w}$  e  $\vec{v} \times \vec{w}$  são linearmente independentes.*
- (III) *O comprimento de  $\vec{v} \times \vec{w}$  é menor que produto dos comprimentos de  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$ .*

- (a) São verdadeiras apenas as afirmações (I) e (II);
- (b) É verdadeira apenas a afirmação (II);
- (c) As três afirmações são verdadeiras;
- (d) É verdadeira apenas a afirmação (I);
- (e) As três afirmações são falsas.

**Questão 17.** Considere os vetores  $\vec{v} = (1, -2, 1)_E$ ,  $\vec{w} = (-1, 1, 1)_E$ . Calcule o cosseno do ângulo entre  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$ .

- (a)  $-\frac{\sqrt{2}}{3}$ ;
- (b)  $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ ;
- (c)  $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ;
- (d)  $-\frac{1}{\sqrt{6}}$ ;
- (e)  $\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{6}}$ .

**Questão 18.** Para quais valores da constante  $\lambda$  os vetores  $\vec{v}_1 = (\lambda, \lambda, 2)_E$ ,  $\vec{v}_2 = (\lambda, -1, -\lambda)_E$  e  $\vec{v}_3 = (2\lambda, 1, -\lambda)_E$  são linearmente dependentes?

- (a)  $\lambda = 0, \pm 1$ ;
- (b)  $\lambda = 0, 1 \pm \sqrt{5}$ ;
- (c)  $\lambda = 0, 1 \pm \sqrt{7}$ ;
- (d)  $\lambda = 0$ ;
- (e)  $\lambda = \pm\sqrt{5}$ .

**Questão 19.** Calcule  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ .

- (a) 0;
- (b) 12;
- (c) -13;
- (d) 10;
- (e) -11.

**Questão 20.** Dada a matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ , seja  $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$  sua matriz inversa. Calcule  $b_{32}$ .

- (a) 0;
- (b) 1;
- (c)  $\frac{3}{2}$ ;
- (d)  $A$  não admite inversa;
- (e)  $-\frac{1}{2}$ .

MAT 112  
Vetores e Geometria  
Prof. Paolo Piccione  
Prova 1  
24 de abril de 2018

Nome: \_\_\_\_\_

Número USP: \_\_\_\_\_

Assinatura: \_\_\_\_\_

**Folha de Respostas** **H**

Turma: 2018146

<b>1</b>	a	b	c	d	e
<b>2</b>	a	b	c	d	e
<b>3</b>	a	b	c	d	e
<b>4</b>	a	b	c	d	e
<b>5</b>	a	b	c	d	e
<b>6</b>	a	b	c	d	e
<b>7</b>	a	b	c	d	e
<b>8</b>	a	b	c	d	e
<b>9</b>	a	b	c	d	e
<b>10</b>	a	b	c	d	e
<b>11</b>	a	b	c	d	e
<b>12</b>	a	b	c	d	e
<b>13</b>	a	b	c	d	e
<b>14</b>	a	b	c	d	e
<b>15</b>	a	b	c	d	e
<b>16</b>	a	b	c	d	e
<b>17</b>	a	b	c	d	e
<b>18</b>	a	b	c	d	e
<b>19</b>	a	b	c	d	e
<b>20</b>	a	b	c	d	e

**Deixe em branco.**

<b>Corretas</b>	<b>Erradas</b>	<b>Nota</b>