MAT 112 — Turma 2018146

Vetores e Geometria

Prof. Paolo Piccione

Prova 1

24 de abril de 2018

Nome: ____

Número USP: ______________________________________

Assinatura: _______________________________________

Instruções

- A duração da prova é de **uma hora e quarenta minutos**.
- Assinale as alternativas corretas na **folha de respostas** que está no final da prova. *É permitido deixar questões em branco.*
- Cada questão tem apenas **uma resposta correta**.
- O valor total da prova é de **10** pontos; cada questão correta vale $\mathbf{\frac{1}{2}}$ ponto (0.5) e *cada questão errada implica num desconto de* $\mathbf{\frac{1}{10}}$ *de ponto* (0.10).
- No final da prova, deve ser entregue apenas a folha de respostas (na última página).
- **Boa Prova!**

Terminologia e Notações Utilizadas na Prova

- $\mathbb{Z}$ denota o conjunto dos números inteiros.
- Fixado um inteiro positivo k e dado $n \in \mathbb{Z}$, o símbulo $[n]_k$ denota a *classe de congruência módulo k de n*.
- No texto, $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ denota sempre uma base ortonormal e orientada positivamente de $\mathbb{V}^3$.
- Dados vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$, o produto vetorial de $\vec{v}$ e $\vec{w}$ é denotado por $\boxed{\vec{v} \times \vec{w}}$, e o produto escalar de $\vec{v}$ e $\vec{w}$ é $\boxed{\vec{v} \cdot \vec{w}}$. O comprimento (norma) do vetor $\vec{v}$ é denotado por $\boxed{\|\vec{v}\|}$.

NÃO ESQUEÇA DE POR SEU NOME
NA FOLHA DE RESPOSTAS!!!

$\boxed{\mathbf{E}}$

Questão 1. *Qual das seguintes identidades é verdadeira para toda tripla de vetores* $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in \mathbb{V}^3$*?*

(a) $(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_3 = (\vec{v}_1 \times \vec{v}_3) \cdot \vec{v}_2$;
(b) $(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_3 = -(\vec{v}_3 \times \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_1$;
(c) $(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_3 = -(\vec{v}_3 \times \vec{v}_1) \cdot \vec{v}_2$;
(d) $(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_3 = (\vec{v}_3 \times \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_1$;
(e) $(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_3 = (\vec{v}_2 \times \vec{v}_1) \cdot \vec{v}_3$.

Questão 2. *Calcule* $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) 12;
(b) -13;
(c) 0;
(d) -11;
(e) 10.

Questão 3. *Qual é a classe de congruência módulo* 7 *do inteiro* -15*?*

(a) $[3]_7$;
(b) $[1]_7$;
(c) $[6]_7$;
(d) $[2]_7$;
(e) $[4]_7$.

Questão 4. *Dada a base ortonormal e orientada postivamente* $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, *calcule* $\big((\vec{e}_1 \times \vec{e}_3) \times \vec{e}_1\big) \times \vec{e}_2$.

(a) $\vec{e}_1$;
(b) $-\vec{e}_1$;
(c) 0;
(d) $-\vec{e}_3$;
(e) $\vec{e}_2$.

Questão 5. *Sejam* B_1, B_2 *e* B_3 *três bases de* $\mathbb{V}^3$, *e* M_1, M_2 *as matrizes de mudança de base:* $B_1 \xrightarrow{M_1} B_2$, $B_2 \xrightarrow{M_2} B_3$. *Assuma* $\det(M_1) < 0$ *e* $\det(M_2) < 0$. *Quais das seguintes afirmações é verdadeira?*

(a) A matriz de mudança de base $B_3 \xrightarrow{M} B_1$ é dada por $M = M_2 \times M_1$;
(b) B_1 e B_3 tem a mesma orientação;
(c) B_1 e B_2 tem a mesma orientação;
(d) M_1 é a inversa da M_2;
(e) M_2 é a inversa da M_1.

Questão 6. *Calcule a projeção ortogonal do vetor* $\vec{v} = (1, 2, -1)_E$ *na direção do vetor* $\vec{w} = (2, -1, -1)_E$.

(a) $\big(-\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{6}\big)_E$;
(b) $\big(\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\big)_E$;
(c) $\big(\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}\big)_E$;
(d) $\big(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\big)_E$;
(e) $\big(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\big)_E$.

Questão 7. *Seja* θ *o ângulo entre os vetores* $\vec{v}$ *e* $\vec{w}$. *Qual é o comprimento do vetor* $(\vec{v} \times \vec{w}) \times \vec{w}$?

(a) $\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot |\cos\theta|$;
(b) $\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|^2 \cdot \sin\theta$;
(c) $\|\vec{v}\|^2 \cdot \|\vec{w}\| \cdot \sin^2\theta$;
(d) $\|\vec{v}\|^2 \cdot \|\vec{w}\|^2 \cdot |\cos\theta|$;
(e) $\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|^2 \cdot |\sin\theta\, \cos\theta|$.

Questão 8. *Sejam* $\vec{v}$ *e* $\vec{w}$ *vetores linearmente independentes de* $\mathbb{V}^3$ *e não ortogonais. Quais das seguintes afirmações é verdadeira?*

(I) *O produto vetorial* $\vec{v} \times \vec{w}$ *é ortogonal ao vetor* $2\vec{v} + 3\vec{w}$.
(II) *Os vetores* $\vec{v}$, $\vec{w}$ *e* $\vec{v} \times \vec{w}$ *são linearmente independentes.*
(III) *O comprimento de* $\vec{v} \times \vec{w}$ *é menor que produto dos comprimentos de* $\vec{v}$ *e* $\vec{w}$.

(a) As três afirmações são falsas;
(b) As três afirmações são verdadeiras;
(c) É verdadeira apenas a afirmação (II);
(d) São verdadeiras apenas as afirmações (I) e (II);
(e) É verdadeira apenas a afirmação (I).

Questão 9. *Seja* $B = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ *uma base de* $\mathbb{V}^3$, *tal que as seguintes identidades valem:*

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0,\ \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3 = 1,\ \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3 = -1,\ \|\vec{v}_1\|^2 = 2,\ \|\vec{v}_2\|^2 = 1, \|\vec{v}_3\|^2 = 3.$$

Calcule o produto escalar $\vec{v} \cdot \vec{w}$, *onde* $\vec{v} = (1, -1, 1)_B$ *e* $\vec{w} = (-1, 2, 3)_B$.

(a) -2;
(b) 8;
(c) 3;
(d) 0;
(e) -3.

Questão 10. *Calcule a área do paralelogramo determinado pelos vetores* $\vec{v} = (1, -2, 1)_E$ *e* $\vec{w} = (1, 0, -1)_E$.

(a) 1;
(b) 2;
(c) $2\sqrt{3}$;
(d) $2\sqrt{2}$;
(e) $3\sqrt{3}$.

Questão 11. *Considere a base* $B = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ *de* $\mathbb{V}^3$, *onde* $\vec{v}_1 = (1, -1, 1)_E$, $\vec{v}_2 = (-2, -1, 0)_E$, *e* $\vec{v}_3 = (0, -1, 1)_E$. *Calcule as componentes* $(a, b, c)_B$ *na base* B *do vetor* $\vec{v} = (-4, 2, -2)_E$.

(a) $(-4, 0, 6)_B$;
(b) $(-4, 0, 2)_B$;
(c) $(2, 1, -1)_B$;
(d) $(4, -2, 2)_B$;
(e) $(4, 2, 2)_B$.

Questão 12. *Dada a matriz* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, *calcule sua matriz inversa* A^{-1}.

(a) A não admite inversa;
(b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$;
(c) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$;
(d) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$;
(e) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Questão 13. *Considere os vetores* $\vec{v} = (1, -2, 1)_E$, $\vec{w} = (-1, 1, 1)_E$. *Calcule o cosseno do ângulo entre* $\vec{v}$ *e* $\vec{w}$.

(a) $\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{6}}$;
(b) $\frac{1}{\sqrt{3}}$;
(c) $-\frac{1}{\sqrt{6}}$;
(d) $-\frac{\sqrt{2}}{3}$;
(e) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Questão 14. *Para quais valores da constante λ os vetores $\vec{v}_1 = (\lambda, \lambda, 2)_E$, $\vec{v}_2 = (\lambda, -1, -\lambda)_E$ e $\vec{v}_3 = (2\lambda, 1, -\lambda)_E$ são linearmente dependentes?*

(a) $\lambda = 0$;
(b) $\lambda = 0, 1 \pm \sqrt{5}$;
(c) $\lambda = \pm\sqrt{5}$;
(d) $\lambda = 0, \pm 1$;
(e) $\lambda = 0, 1 \pm \sqrt{7}$.

Questão 15. *Calcule o produto triplo $(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_3$, onde $\vec{v}_1 = (2, 0, 1)_E$, $\vec{v}_2 = (4, 3, 0)_E$ e $\vec{v}_3 = (2, -2, 1)_E$.*

(a) -3;
(b) 5;
(c) 0;
(d) -8;
(e) 2.

Questão 16. *Determine α, β e γ de forma tal que os vetores $(1, 2\alpha, 1)_E$, $(-\beta, 0, 1)_E$ e $(1, 1, \gamma)_E$ formem uma base ortogonal de $\mathbb{V}^3$.*

(a) $\alpha = -1$, $\beta = 1$, $\gamma = 1$;
(b) $\alpha = -1$, $\beta = 1$, $\gamma = -1$;
(c) $\alpha = -2$, $\beta = 1$, $\gamma = 1$;
(d) $\alpha = 2$, $\beta = 1$, $\gamma = -1$;
(e) $\alpha = 2$, $\beta = -1$, $\gamma = 1$.

Questão 17. *Analise as afirmações* (i), (ii) *e* (iii) *abaixo, coloque* (V) *para verdadeiro ou* (F) *para falso e em seguida marque a respectiva sequência correta:*

(i) *Seja $\vec{v}$ um vetor em $\mathbb{V}^3$, e seja $\vec{u} \in \mathbb{V}^3$ um vetor unitário (i.e., de comprimento 1).*
O vetor $\vec{w} = \vec{v} - 2(\vec{v} \cdot \vec{u})\vec{u}$ é ortogonal a $\vec{u}$.

(ii) *Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são linearmente independentes então $\vec{w}_1 = \vec{u} + \vec{v}$ e $\vec{w}_2 = \vec{u} - \vec{v}$ são linearmente independentes.*

(iii) *Se E é uma base ortonormal, $\vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\right)_E$ tem norma 1.*

(a) F, F, V;
(b) V, V, F;
(c) F, V, V;
(d) V, V, V;
(e) F, F, F.

Questão 18. *Dado um octógono regular $ABCDEFGH$ no plano, com centro O, calcule:*

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{AH}.$$

(a) $6\,\overrightarrow{AF}$;
(b) 0;
(c) $-8\overrightarrow{AO}$;
(d) $8\,\overrightarrow{AO}$;
(e) $-6\,\overrightarrow{AF}$.

Questão 19. *Considere a base $B = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ formada pelos vetores $\vec{v}_1 = (1,0,1)_E$, $\vec{v}_2 = (1,1,0)_E$ e $\vec{v}_3 = (0,0,1)_E$. Seja $(\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3)$ a base ortonormal obtida de B pelo método de Gram–Schmidt. Calcule o vetor $\vec{w}_2$.*

(a) $\vec{w}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,2,1)_E$;
(b) $\vec{w}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,-1)_E$;
(c) $\vec{w}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,2,-1)_E$;
(d) $\vec{w}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,-1)_E$;
(e) $\vec{w}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)_E$.

Questão 20. *Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, seja $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$ sua matriz inversa. Calcule b_{32}.*

(a) 1;
(b) 0;
(c) $-\frac{1}{2}$;
(d) $\frac{3}{2}$;
(e) A não admite inversa.

MAT 112

Vetores e Geometria

Prof. Paolo Piccione

Prova 1

24 de abril de 2018

Nome: ____

Número USP: ____

Assinatura: ____

Folha de Respostas $\boxed{\text{E}}$

Turma: 2018146

1	a	b	c	d	e
2	a	b	c	d	e
3	a	b	c	d	e
4	a	b	c	d	e
5	a	b	c	d	e
6	a	b	c	d	e
7	a	b	c	d	e
8	a	b	c	d	e
9	a	b	c	d	e
10	a	b	c	d	e
11	a	b	c	d	e
12	a	b	c	d	e
13	a	b	c	d	e
14	a	b	c	d	e
15	a	b	c	d	e
16	a	b	c	d	e
17	a	b	c	d	e
18	a	b	c	d	e
19	a	b	c	d	e
20	a	b	c	d	e

Deixe em branco.

Corretas	**Erradas**	**Nota**