

MAT 112 — Turma 2018134

Vetores e Geometria

Prof. Paolo Piccione

Prova 1

24 de abril de 2018

Nome: _____

Número USP: _____

Assinatura: _____

Instruções

- A duração da prova é de **uma hora e quarenta minutos**.
- Assinale as alternativas corretas na **folha de respostas** que está no final da prova. *É permitido deixar questões em branco.*
- Cada questão tem apenas **uma resposta correta**.
- O valor total da prova é de **10** pontos; cada questão correta vale $\frac{1}{2}$ ponto (0.5) e *cada questão errada implica num desconto de $\frac{1}{10}$ de ponto* (0.10).
- No final da prova, deve ser entregue apenas a folha de respostas (na última página).
- **Boa Prova!**

Terminologia e Notações Utilizadas na Prova

- \mathbb{Z} denota o conjunto dos números inteiros.
- Fixado um inteiro positivo k e dado $n \in \mathbb{Z}$, o símbolo $[n]_k$ denota a *classe de congruência módulo k de n* .
- No texto, $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ denota sempre uma base ortonormal e orientada positivamente de \mathbb{V}^3 .
- Dados vetores \vec{v} e \vec{w} , o produto vetorial de \vec{v} e \vec{w} é denotado por $\boxed{\vec{v} \times \vec{w}}$, e o produto escalar de \vec{v} e \vec{w} é $\boxed{\vec{v} \cdot \vec{w}}$. O comprimento (norma) do vetor \vec{v} é denotado por $\boxed{\|\vec{v}\|}$.

**NÃO ESQUEÇA DE POR SEU NOME
NA FOLHA DE RESPOSTAS!!!**

A

Questão 1. Considere a base $B = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ formada pelos vetores $\vec{v}_1 = (1, 0, 1)_E$, $\vec{v}_2 = (1, 1, 0)_E$ e $\vec{v}_3 = (0, 0, 1)_E$. Seja $(\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3)$ a base ortonormal obtida de B pelo método de Gram-Schmidt. Calcule o vetor \vec{w}_2 .

- (a) $\vec{w}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 2, 1)_E$;
- (b) $\vec{w}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 2, -1)_E$;
- (c) $\vec{w}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, -1)_E$;
- (d) $\vec{w}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, -1)_E$;
- (e) $\vec{w}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1)_E$.

Questão 2. Calcule a projeção ortogonal do vetor $\vec{v} = (1, 2, -1)_E$ na direção do vetor $\vec{w} = (2, -1, -1)_E$.

- (a) $(\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}})_E$;
- (b) $(\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{6})_E$;
- (c) $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{6})_E$;
- (d) $(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}})_E$;
- (e) $(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})_E$.

Questão 3. Para quais valores da constante λ os vetores $\vec{v}_1 = (\lambda, \lambda, 2)_E$, $\vec{v}_2 = (\lambda, -1, -\lambda)_E$ e $\vec{v}_3 = (2\lambda, 1, -\lambda)_E$ são linearmente dependentes?

- (a) $\lambda = 0$;
- (b) $\lambda = 0, 1 \pm \sqrt{5}$;
- (c) $\lambda = 0, 1 \pm \sqrt{7}$;
- (d) $\lambda = \pm\sqrt{5}$;
- (e) $\lambda = 0, \pm 1$.

Questão 4. Considere a base $B = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ de \mathbb{V}^3 , onde $\vec{v}_1 = (1, -1, 1)_E$, $\vec{v}_2 = (-2, -1, 0)_E$, e $\vec{v}_3 = (0, -1, 1)_E$. Calcule as componentes $(a, b, c)_B$ na base B do vetor $\vec{v} = (-4, 2, -2)_E$.

- (a) $(-4, 0, 2)_B$;
- (b) $(-4, 0, 6)_B$;
- (c) $(2, 1, -1)_B$;
- (d) $(4, 2, 2)_B$;
- (e) $(4, -2, 2)_B$.

Questão 5. Calcule o produto triplo $(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_3$, onde $\vec{v}_1 = (2, 0, 1)_E$, $\vec{v}_2 = (4, 3, 0)_E$ e $\vec{v}_3 = (2, -2, 1)_E$.

- (a) -3 ;
- (b) 2 ;
- (c) 5 ;
- (d) 0 ;
- (e) -8 .

Questão 6. Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, calcule sua matriz inversa A^{-1} .

- (a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$;
- (b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$;
- (c) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$;
- (d) A não admite inversa;
- (e) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$.

Questão 7. Sejam B_1, B_2 e B_3 três bases de \mathbb{V}^3 , e M_1, M_2 as matrizes de mudança de base: $B_1 \xrightarrow{M_1} B_2$, $B_2 \xrightarrow{M_2} B_3$. Assuma $\det(M_1) < 0$ e $\det(M_2) < 0$. Quais das seguintes afirmações é verdadeira?

- (a) M_2 é a inversa da M_1 ;
- (b) A matriz de mudança de base $B_3 \xrightarrow{M} B_1$ é dada por $M = M_2 \times M_1$;
- (c) B_1 e B_3 tem a mesma orientação;
- (d) B_1 e B_2 tem a mesma orientação;
- (e) M_1 é a inversa da M_2 .

Questão 8. Qual das seguintes identidades é verdadeira para toda tripla de vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in \mathbb{V}^3$?

- (a) $(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_3 = (\vec{v}_2 \times \vec{v}_1) \cdot \vec{v}_3$;
- (b) $(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_3 = -(\vec{v}_3 \times \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_1$;
- (c) $(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_3 = (\vec{v}_1 \times \vec{v}_3) \cdot \vec{v}_2$;
- (d) $(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_3 = -(\vec{v}_3 \times \vec{v}_1) \cdot \vec{v}_2$;
- (e) $(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_3 = (\vec{v}_3 \times \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_1$.

Questão 9. Considere os vetores $\vec{v} = (1, -2, 1)_E$, $\vec{w} = (-1, 1, 1)_E$. Calcule o cosseno do ângulo entre \vec{v} e \vec{w} .

- (a) $\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{6}}$;
- (b) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$;
- (c) $\frac{1}{\sqrt{3}}$;
- (d) $-\frac{1}{\sqrt{6}}$;
- (e) $-\frac{\sqrt{2}}{3}$.

Questão 10. Seja θ o ângulo entre os vetores \vec{v} e \vec{w} . Qual é o comprimento do vetor $(\vec{v} \times \vec{w}) \times \vec{w}$?

- (a) $\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot |\cos \theta|$;
- (b) $\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|^2 \cdot \sin \theta$;
- (c) $\|\vec{v}\|^2 \cdot \|\vec{w}\| \cdot \sin^2 \theta$;
- (d) $\|\vec{v}\|^2 \cdot \|\vec{w}\|^2 \cdot |\cos \theta|$;
- (e) $\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|^2 \cdot |\sin \theta \cos \theta|$.

Questão 11. Seja $B = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ uma base de \mathbb{V}^3 , tal que as seguintes identidades valem:

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0, \quad \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3 = 1, \quad \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3 = -1, \quad \|\vec{v}_1\|^2 = 2, \quad \|\vec{v}_2\|^2 = 1, \quad \|\vec{v}_3\|^2 = 3.$$

Calcule o produto escalar $\vec{v} \cdot \vec{w}$, onde $\vec{v} = (1, -1, 1)_B$ e $\vec{w} = (-1, 2, 3)_B$.

- (a) 8;
- (b) -3;
- (c) 0;
- (d) 3;
- (e) -2.

Questão 12. Dado um octógono regular $ABCDEFGH$ no plano, com centro O , calcule:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AH}.$$

- (a) $6\overrightarrow{AF}$;
- (b) $8\overrightarrow{AO}$;
- (c) $-6\overrightarrow{AF}$;
- (d) $-8\overrightarrow{AO}$;
- (e) 0.

Questão 13. Calcule a área do paralelogramo determinado pelos vetores $\vec{v} = (1, -2, 1)_E$ e $\vec{w} = (1, 0, -1)_E$.

- (a) $2\sqrt{2}$;
- (b) 2;
- (c) 1;
- (d) $3\sqrt{3}$;
- (e) $2\sqrt{3}$.

Questão 14. Sejam \vec{v} e \vec{w} vetores linearmente independentes de \mathbb{V}^3 e não ortogonais. Quais das seguintes afirmações é verdadeira?

- (I) O produto vetorial $\vec{v} \times \vec{w}$ é ortogonal ao vetor $2\vec{v} + 3\vec{w}$.
- (II) Os vetores \vec{v} , \vec{w} e $\vec{v} \times \vec{w}$ são linearmente independentes.
- (III) O comprimento de $\vec{v} \times \vec{w}$ é menor que produto dos comprimentos de \vec{v} e \vec{w} .

- (a) As três afirmações são falsas;
- (b) São verdadeiras apenas as afirmações (I) e (II);
- (c) É verdadeira apenas a afirmação (II);
- (d) É verdadeira apenas a afirmação (I);
- (e) As três afirmações são verdadeiras.

Questão 15. Determine α , β e γ de forma tal que os vetores $(1, 2\alpha, 1)_E$, $(-\beta, 0, 1)_E$ e $(1, 1, \gamma)_E$ formem uma base ortogonal de \mathbb{V}^3 .

- (a) $\alpha = -1$, $\beta = 1$, $\gamma = 1$;
- (b) $\alpha = -2$, $\beta = 1$, $\gamma = 1$;
- (c) $\alpha = 2$, $\beta = 1$, $\gamma = -1$;
- (d) $\alpha = -1$, $\beta = 1$, $\gamma = -1$;
- (e) $\alpha = 2$, $\beta = -1$, $\gamma = 1$.

Questão 16. Calcule $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

- (a) 10;
- (b) -13;
- (c) 0;
- (d) -11;
- (e) 12.

Questão 17. Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, seja $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$

sua matriz inversa. Calcule b_{32} .

- (a) $\frac{3}{2}$;
- (b) 0;
- (c) A não admite inversa;
- (d) $-\frac{1}{2}$;
- (e) 1.

Questão 18. Dada a base ortonormal e orientada positivamente $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, calcule $((\vec{e}_1 \times \vec{e}_3) \times \vec{e}_1) \times \vec{e}_2$.

- (a) \vec{e}_1 ;
- (b) \vec{e}_2 ;
- (c) $-\vec{e}_3$;
- (d) $-\vec{e}_1$;
- (e) 0.

Questão 19. Analise as afirmações (i), (ii) e (iii) abaixo, coloque (V) para verdadeiro ou (F) para falso e em seguida marque a respectiva sequência correta:

- (i) Seja \vec{v} um vetor em \mathbb{V}^3 , e seja $\vec{u} \in \mathbb{V}^3$ um vetor unitário (i.e., de comprimento 1).
O vetor $\vec{w} = \vec{v} - 2(\vec{v} \cdot \vec{u})\vec{u}$ é ortogonal a \vec{u} .
- (ii) Se \vec{u} e \vec{v} são linearmente independentes então $\vec{w}_1 = \vec{u} + \vec{v}$ e $\vec{w}_2 = \vec{u} - \vec{v}$ são linearmente independentes.
- (iii) Se E é uma base ortonormal, $\vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\right)_E$ tem norma 1.

- (a) F, V, V;
- (b) F, F, V;
- (c) V, V, F;
- (d) F, F, F;
- (e) V, V, V.

Questão 20. Qual é a classe de congruência módulo 7 do inteiro -15 ?

- (a) $[1]_7$;
- (b) $[6]_7$;
- (c) $[3]_7$;
- (d) $[4]_7$;
- (e) $[2]_7$.

MAT 112
Vetores e Geometria
Prof. Paolo Piccione
Prova 1
24 de abril de 2018

Nome: _____

Número USP: _____

Assinatura: _____

Folha de Respostas **A**

Turma: 2018134

1	a	b	c	d	e
2	a	b	c	d	e
3	a	b	c	d	e
4	a	b	c	d	e
5	a	b	c	d	e
6	a	b	c	d	e
7	a	b	c	d	e
8	a	b	c	d	e
9	a	b	c	d	e
10	a	b	c	d	e
11	a	b	c	d	e
12	a	b	c	d	e
13	a	b	c	d	e
14	a	b	c	d	e
15	a	b	c	d	e
16	a	b	c	d	e
17	a	b	c	d	e
18	a	b	c	d	e
19	a	b	c	d	e
20	a	b	c	d	e

Deixe em branco.

Corretas	Erradas	Nota