

**MAT 0112 – VETORES E GEOMETRIA**  
**LISTA DE EXERCÍCIOS 1**

PROF. PAOLO PICCIONE

**Proposição.** A relação de equipolência é uma relação de equivalência, isto é, quaisquer que sejam os segmentos orientados  $(A, B)$ ,  $(C, D)$  e  $(E, F)$  :

- (i)  $(A, B) \sim (A, B)$  (propriedade reflexiva)
- (ii)  $(A, B) \sim (C, D) \Rightarrow (C, D) \sim (A, B)$  (propriedade simétrica)
- (iii)  $(A, B) \sim (C, D)$  e  $(C, D) \sim (E, F) \Rightarrow (A, B) \sim (E, F)$  (propriedade transitiva)

1. EXERCÍCIOS

**Questão 1.1.** Prove então que se  $[(A, B) \sim (P, Q)$  e  $(C, D) \sim (P, Q)]$  então  $(A, B) \sim (C, D)$ .

**Questão 1.2.** Seja  $X = \mathbb{Z}$  o conjunto dos números inteiros. Para os conjuntos  $R \subset X \times X$  aqui em baixo, determine quais são relações de equivalência, e nesse caso, descreva as classes de equivalência.

- (a)  $R = \{(n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : n - m \geq 1\}$
- (b)  $R = \{(n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : n - m \text{ é múltiplo de } 7\}$
- (c)  $R = \{(n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : n + m \text{ é múltiplo de } 7\}$
- (d)  $R = \{(n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : n - 2m \text{ é múltiplo de } 5\}$
- (e)  $R = \{(n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : n \geq m\}$

**Questão 1.3.**  $\vec{u} = -\vec{u} \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$

**Questão 1.4.** Verifique, justificando, se é verdadeira ou falsa cada afirmação:

- (i) ( ) Se  $\vec{u} = \vec{v}$  então  $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$
- (ii) ( ) Se  $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$  então  $\vec{u} = \vec{v}$
- (iii) ( ) Se  $\vec{u} // \vec{v}$  então  $\vec{u} = \vec{v}$
- (iv) ( ) Se  $\vec{u} = \vec{v}$  então  $\vec{u} // \vec{v}$ .
- (v) ( ) Se  $\vec{AB} = \vec{CD}$  então  $AC \cap BD = \emptyset$

**Questão 1.5.** Verifique, justificando, se é verdadeira ou falsa cada afirmação:

- (i) ( )  $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$  para quaisquer  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ .
- (ii) ( )  $\|\vec{u} - \vec{w}\| = \|\vec{u}\| - \|\vec{w}\|$  para quaisquer  $\vec{u}$  e  $\vec{w}$ .

**Questão 1.6.** Quais são a origem e a extremidade de um representante do vetor  $\vec{BC} + \vec{GH} - \vec{FA} - \vec{GC} + \vec{FB}$ ?

**Questão 1.7.** Determinar a origem  $A$  do segmento que representa o vetor  $\vec{u} = (2, 3, -1)$ , sendo sua extremidade o ponto  $B = (0, 4, 2)$ .

**Questão 1.8.** Mostre que, se  $\vec{v}$  é um vetor não-nulo, então  $\vec{v}$  e seu versor,  $\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ , são paralelos, de mesmo sentido, e que o versor de  $\vec{v}$  tem norma 1.

**Questão 1.9.** O hexágono  $ABCDEF$  é regular, de centro  $O$ . Prove que  $\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD} + \vec{AE} + \vec{AF} = 6\vec{AO}$ .

**Questão 1.10.** Os pontos  $A, B, C$  e  $D$  são tais que  $A \neq B$ ,  $C \neq D$ , e as retas  $AB$  e  $CD$  não são paralelas. Prove que  $\alpha \overrightarrow{AB} = \beta \overrightarrow{CD} \Rightarrow \alpha = \beta = 0$ .

**Questão 1.11.** Prove que  $A + \vec{u} = B + \vec{v} \Rightarrow \vec{u} = \overrightarrow{AB} + \vec{v}$ .

**Questão 1.12.** Dados os pontos  $A, B$  e  $C$ , determine  $X$ , sabendo que  $(A + \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{CX} = C + \overrightarrow{CB}$ .

**Questão 1.13.** Prove que, se  $B = A + \overrightarrow{DC}$ , então  $B = C + \overrightarrow{DA}$ .

**Questão 1.14.** Seja  $r$  a razão em que o ponto  $P$  divide o segmento orientado não-nulo  $(A, B)$ . Prove que  $r \neq -1$  e que  $\overrightarrow{AP} = \frac{r}{1+r} \overrightarrow{AB}$ .

**Questão 1.15.** Sejam  $A, B$  e  $C$  pontos quaisquer,  $A \neq B$ . Prove que  $X$  pertence à reta  $AB$  se, e somente se, existem  $\alpha$  e  $\beta$  tais que  $\overrightarrow{CX} = \alpha \overrightarrow{CA} + \beta \overrightarrow{CB}$  e  $\alpha + \beta = 1$ .

**Questão 1.16.** O ponto  $X$  divide  $(A, B)$  na razão  $\alpha$ ,  $Y$  divide  $(B, C)$  na razão  $\beta$  e  $Z$  divide  $(C, A)$  na razão  $\gamma$ . Exprima  $\overrightarrow{CX}$ ,  $\overrightarrow{AY}$  e  $\overrightarrow{BZ}$  em função de  $\overrightarrow{CA}$ ,  $\overrightarrow{CB}$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ .

**Questão 1.17.** Dado o triângulo  $ABC$ , sejam  $X$  e  $Y$  os pontos tais que  $\overrightarrow{BX} = \alpha \overrightarrow{BC}$  e  $\overrightarrow{AY} = \beta \overrightarrow{AC}$ . (Figura 1).

Prove que  $AX \parallel BY$  se, e somente se,  $\frac{\alpha-1}{\beta-1} = 1$

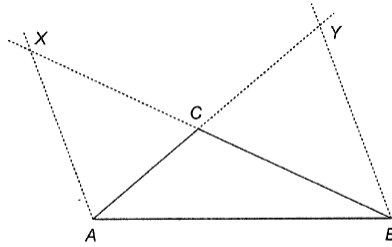


Figura 1

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA  
 DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
 RUA DO MATÃO, 1010  
 CIDADE UNIVERSITÁRIA  
 SÃO PAULO-SP  
 CEP 05508-090  
 BRASIL