

MAT 112 — Turma 2017146 e 2017134

Vetores e Geometria

Prof. P.P.

Prova SUB

06 de julho de 2017

Nome: _____

Número USP: _____

Assinatura: _____

Instruções

- A duração da prova é de **uma hora e quarenta minutos**.
- Assinale as alternativas corretas na **folha de respostas** que está no final da prova. *É permitido deixar questões em branco*. Cada questão tem apenas **uma resposta correta**.
- O valor total da prova é de **10** pontos; cada questão correta vale $\frac{1}{2}$ ponto (0.5) e, **caso houver mais de três respostas erradas**, *cada questão errada implica num desconto de $\frac{1}{10}$ de ponto* (0.10).
- No final da prova, deve ser entregue apenas a folha de respostas (na última página).
- A nota da SUB vai substituir a menor das notas das provas P1 e P2 no cálculo da média final (mesmo no caso em que a nota da SUB seja mais baixa da nota menor entre P1 e P2). É permitido sair da sala sem entregar a folha de respostas, como se o aluno não tivesse se apresentado para a prova.

Terminologia e Notações Utilizadas na Prova

- \mathbb{E}^2 e \mathbb{E}^3 denotam respectivamente o plano e o espaço euclidiano. A distância euclidiana será denotada com dist . Onde não especificado diversamente, todos os sistemas de coordenadas em \mathbb{E}^2 e em \mathbb{E}^3 são ortonormais.
- Dados vetores \vec{v} e \vec{w} , o produto vetorial de \vec{v} e \vec{w} é denotado por $\vec{v} \times \vec{w}$, e o produto escalar de \vec{v} e \vec{w} é $\vec{v} \cdot \vec{w}$. O comprimento (norma) do vetor \vec{v} é denotado por $\|\vec{v}\|$.

**NÃO ESQUEÇA DE POR SEU NOME
NA FOLHA DE RESPOSTAS!!!**

B

Questão 1. Calcule o produto triplo $(\vec{v}_2 \times \vec{v}_1) \cdot \vec{v}_3$, onde $\vec{v}_1 = (2, 0, 0)_E$, $\vec{v}_2 = (4, 3, 0)_E$ e $\vec{v}_3 = (2, -2, -1)_E$.

- (a) -6 ;
- (b) -3 ;
- (c) 6 ;
- (d) 3 ;
- (e) 0 .

Questão 2. Seja S uma esfera de centro $C = (3, 2, 1)$, e suponha que o plano $\pi : x + z + 1 = 0$ seja tangente a S . Calcule o raio de S .

- (a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$;
- (b) $\frac{5}{\sqrt{2}}$;
- (c) $\sqrt{3}$;
- (d) $\frac{1}{\sqrt{3}}$;
- (e) $\frac{3}{\sqrt{5}}$.

Questão 3. Determine o ângulo entre a reta $X = (6, 7, 0) + (-2, -2, 0)\lambda$ e o plano $X = (8, -4, 2) + \lambda \cdot (1, 0, -2) + \mu \cdot (1, -2, 0)$.

- (a) $\frac{\pi}{3}$;
- (b) $\frac{2}{3}\pi$;
- (c) $\frac{\pi}{4}$;
- (d) $\frac{\pi}{6}$;
- (e) $\frac{\pi}{2}$.

Questão 4. Determine a equação da esfera S em \mathbb{E}^3 com centro no ponto $C = (-1, 1, -2)$ e raio $R = \sqrt{6}$

- (a) $S : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 2z = 0$;
- (b) $S : x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y + 4z = 0$;
- (c) $S : x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y + 4z = 0$;
- (d) $S : x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 4z = 0$;
- (e) $S : x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 4z = 0$.

Questão 5. Seja B uma base de \mathbb{V}^3 . Para quais valores da constante λ os vetores $\vec{v}_1 = (\lambda, \lambda, 2)_B$, $\vec{v}_2 = (\lambda, -1, -\lambda)_B$ e $\vec{v}_3 = (2\lambda, 1, -\lambda)_B$ são linearmente dependentes?

- (a) $\lambda = 0, \pm 1$;
- (b) $\lambda = \pm\sqrt{5}$;
- (c) $\lambda = 0, 1 \pm \sqrt{7}$;
- (d) $\lambda = 0, 1 \pm \sqrt{5}$;
- (e) $\lambda = 0$.

Questão 6. Dados os vetores $\vec{v}_1 = (2, 0, 1)_E$ e $\vec{v}_2 = (1, 1, 1)_E$, determine um vetor \vec{v}_3 de **comprimento igual a 3**, ortogonal a \vec{v}_1 e \vec{v}_2 , e tal que a base $B = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ seja orientada **negativamente**.

- (a) $\vec{v}_3 = \left(-\frac{3}{\sqrt{6}}, -\frac{3}{\sqrt{6}}, -\frac{6}{\sqrt{6}}\right)$;
- (b) $\vec{v}_3 = \left(\frac{3}{\sqrt{6}}, \frac{3}{\sqrt{6}}, \frac{6}{\sqrt{6}}\right)$;
- (c) $\vec{v}_3 = \left(-\frac{3}{\sqrt{6}}, \frac{3}{\sqrt{6}}, -\frac{6}{\sqrt{6}}\right)$;
- (d) $\vec{v}_3 = \left(\frac{3}{\sqrt{6}}, \frac{3}{\sqrt{6}}, -\frac{6}{\sqrt{6}}\right)$;
- (e) $\vec{v}_3 = \left(-\frac{3}{\sqrt{6}}, -\frac{3}{\sqrt{6}}, \frac{6}{\sqrt{6}}\right)$.

Questão 7. Considere as retas

$$r_1 : \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 4 + \lambda \\ z = -1 - \lambda \end{cases} \quad e \quad r_2 : \begin{cases} x = 4 + s \\ y = -s \\ z = -1 - 3s, \end{cases} \quad \lambda, s \in \mathbb{R}.$$

Determine o plano π tal que:

$$\text{dist}(\pi, r_1) = \frac{1}{3} \text{dist}(r_1, r_2) \quad e \quad \text{dist}(\pi, r_2) = \frac{2}{3} \text{dist}(r_1, r_2).$$

- (a) $\pi : 2x - 4y + 5z = 5$;
- (b) $\pi : 2x - 5y + z = 3$;
- (c) $\pi : 2x - y + 5z = 6$;
- (d) $\pi : 2x - y + z = 3$;
- (e) $\pi : 2x - 2y + z = 4$.

Questão 8. Calcule $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

- (a) 0;
- (b) -6;
- (c) -2;
- (d) 1;
- (e) 4.

Questão 9. Seja S uma esfera de centro $C = (1, 1, 0)$, e suponha que a interseção de S com o plano $\pi : -3y + 4z = 2$ seja um círculo de raio $r = 1$. Calcule o raio R de S .

- (a) $R = 2$;
- (b) $R = \frac{1}{2}$;
- (c) $R = \frac{1}{5}$;
- (d) $R = \frac{1}{\sqrt{3}}$;
- (e) $R = \sqrt{2}$.

Questão 10. Determine o valor da constante m para que seja de 30° o ângulo entre os planos:

$$\pi_1 : x + my + 2z - 7 = 0 \quad e \quad \pi_2 : 4x + 5y + 3z - 2 = 0.$$

- (a) $m = \pm 5$;
- (b) $m = -1$ ou $m = 3$;
- (c) $m = \pm 3$;
- (d) $m = 1$ ou $m = 7$;
- (e) $m = 5$ ou $m = 7$.

Questão 11. O plano $\pi : x + y - z + 2 = 0$ em \mathbb{E}^3 intercepta os eixos cartesianos nos pontos A, B e C . Calcular a área do triângulo ABC .

- (a) $2\sqrt{3}$;
- (b) 2;
- (c) $2\sqrt{2}$;
- (d) $\sqrt{3}$;
- (e) $3\sqrt{3}$.

Questão 12. Qual é o nome correto do professor deste curso?

- (a) Paulo Picionne;
- (b) Paolo Piccione;
- (c) Paulo Paccione;
- (d) Paulo Picione;
- (e) Paolo Picionne.

Questão 13. Considere a cônica de equação $2x^2 - xy - y^2 - 2 = 0$ em \mathbb{E}^2 . Sejam (u, v) coordenadas ortonormais no plano obtidas por uma rotação de um ângulo θ do sistema de coordenadas (x, y) . Assuma que no sistema de coordenadas (u, v) a equação da cônica seja da forma $Au^2 + Bv^2 + C = 0$. Calcule a tangente de 2θ .

- (a) $\tan(2\theta) = -\frac{7}{3}$;
- (b) $\tan(2\theta) = \frac{3}{2}$;
- (c) $\tan(2\theta) = -\frac{1}{3}$;
- (d) $\tan(2\theta) = \frac{5}{3}$;
- (e) $\tan(2\theta) = -\frac{5}{2}$.

Questão 14. Determine a posição relativa das retas r e s dadas por:

$$r : (1, 1, -1) + \lambda(2, -1, 3) \quad e \quad s : (5, 1, 5) + \lambda\left(1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

- (a) $r \cap s$ é um círculo de raio $\frac{1}{3}$;
- (b) r e s são paralelas, e $r \neq s$;
- (c) r e s são concorrentes, $r \neq s$;
- (d) r e s são reversas;
- (e) $r = s$.

Questão 15. Considere os planos

$$\pi_1 : mx - ny + z = 2 \quad e \quad \pi_2 : nx - my + nz = 4.$$

Determine $m, n \in \mathbb{R}$ de modo que $\pi_1 \cap \pi_2$ seja uma reta perpendicular ao vetor $\vec{v} = (2, 1, -1)$ e que passa pelo ponto $A = (0, 0, 2)$.

- (a) $n = \sqrt{2}$ e $m = 8$;
- (b) $n = 2$ e $m = 10$;
- (c) $n = \sqrt{2}$ e $m = \pm\sqrt{10}$;
- (d) $n = 2$ e $m = \pm\sqrt{10}$;
- (e) $n = 4$ e $m = \sqrt{10}$.

Questão 16. Considere o ponto $A = (1, 2, 1)$ e a reta

$$r : \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$$

Ache a equação cartesiana do plano π que contém a reta r e o ponto A .

- (a) $\pi : 3x - y + 2z = 2$;
- (b) $\pi : 4x - y + 2z = 4$;
- (c) $\pi : 4x + y + 2z = 5$;
- (d) $\pi : 4x - y - 2z = 3$;
- (e) $\pi : 2x - y - 2z = 4$.

Questão 17. Calcule a distância entre o ponto $P_0 = (-1, -2, 1)$ e o plano $\pi : -2x + 4y - z + 1 = 0$.

- (a) $\frac{2}{\sqrt{7}}$;
- (b) $\frac{6}{\sqrt{21}}$;
- (c) $\frac{3}{\sqrt{5}}$;
- (d) $\frac{7}{\sqrt{21}}$;
- (e) $\frac{5}{\sqrt{3}}$.

Questão 18. Sejam $P = (1, 0, 1)$ e $Q = (0, 1, 1)$. Ache um ponto C da reta PQ tal que a área do triângulo ABC onde $A = (3, -2, 1)$ e $B = (0, 0, 1)$ seja $\frac{1}{2}$.

- (a) $C = (2, -1, 1)$ ou $C = (4, -3, 1)$;
- (b) $C = (2, -1, -1)$ ou $C = (2, -2, 1)$;
- (c) $C = (2, 1, 1)$ ou $C = (4, -3, -1)$;
- (d) $C = (1, -1, 1)$ ou $C = (1, -3, 1)$;
- (e) $C = (1, -1, 1)$ ou $C = (4, 3, 1)$.

Questão 19. Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, seja $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$ sua matriz inversa. Calcule b_{23} .

- (a) -1 ;
- (b) 0 ;
- (c) 2 ;
- (d) 3 ;
- (e) A não admite inversa.

Questão 20. Determine a posição relativa das esferas:

$$S_1 : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z = 0,$$

$$S_2 : x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y + 2z + 2 = 0.$$

- (a) S_1 está contida na parte interior de S_2 , e $S_1 \cap S_2$ é um círculo de raio $r = \frac{1}{4}$;
- (b) S_1 está contida na parte interior de S_2 , e $S_1 \cap S_2 = \emptyset$;
- (c) S_1 está contida na parte exterior de S_2 , e é tangente a S_2 ;
- (d) S_1 está contida na parte interior de S_2 , e é tangente a S_2 ;
- (e) S_1 está contida na parte exterior de S_2 , e $S_1 \cap S_2 = \emptyset$.

MAT 112
Vetores e Geometria
Prof. P. P.
Prova SUB
06 de julho de 2017

Nome (legível!!): _____

Número USP: _____

Assinatura: _____

Folha de Respostas **B**

Marque aqui sua turma: 2017146 (IME) 2017134 (IAG)

| | | | | | |
|-----------|---|---|---|---|---|
| 1 | a | b | c | d | e |
| 2 | a | b | c | d | e |
| 3 | a | b | c | d | e |
| 4 | a | b | c | d | e |
| 5 | a | b | c | d | e |
| 6 | a | b | c | d | e |
| 7 | a | b | c | d | e |
| 8 | a | b | c | d | e |
| 9 | a | b | c | d | e |
| 10 | a | b | c | d | e |
| 11 | a | b | c | d | e |
| 12 | a | b | c | d | e |
| 13 | a | b | c | d | e |
| 14 | a | b | c | d | e |
| 15 | a | b | c | d | e |
| 16 | a | b | c | d | e |
| 17 | a | b | c | d | e |
| 18 | a | b | c | d | e |
| 19 | a | b | c | d | e |
| 20 | a | b | c | d | e |

Deixe em branco.

| Corretas | Erradas | Nota |
|-----------------|----------------|-------------|
| | | |