MAT 112 — Turma 2017146 e 2017134

Vetores e Geometria

Prof. P.P.

Prova SUB

06 de julho de 2017

Nome: ____

Número USP: ____

Assinatura: ____

Instruções

- A duração da prova é de **uma hora e quarenta minutos**.
- Assinale as alternativas corretas na **folha de respostas** que está no final da prova. *É permitido deixar questões em branco.* Cada questão tem apenas **uma resposta correta**.
- O valor total da prova é de **10** pontos; cada questão correta vale $\mathbf{\frac{1}{2}}$ ponto (0.5) e, **caso houver mais de três respostas erradas**, *cada questão errada implica num desconto de* $\mathbf{\frac{1}{10}}$ *de ponto* (0.10).
- No final da prova, deve ser entregue apenas a folha de respostas (na última página).
- A nota da SUB vai substituir a menor das notas das provas P1 e P2 no cálculo da média final (mesmo no caso em que a nota da SUB seja mais baixa da nota menor entre P1 e P2). É permitido sair da sala sem entregar a folha de respostas, como se o aluno não tivesse se apresentado para a prova.

Terminologia e Notações Utilizadas na Prova

- $\boxed{\mathbb{E}^2}$ e $\boxed{\mathbb{E}^3}$ denotam respeitivamente o plano e o espaço euclidiano. A distância euclidiana será denotada com $\boxed{\text{dist}}$. Onde não especificado diversamente, todos os sistemas de coordenadas em $\mathbb{E}^2$ e em $\mathbb{E}^3$ são ortonormais.
- Dados vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$, o produto vetorial de $\vec{v}$ e $\vec{w}$ é denotado por $\boxed{\vec{v} \times \vec{w}}$, e o produto escalar de $\vec{v}$ e $\vec{w}$ é $\boxed{\vec{v} \cdot \vec{w}}$. O comprimento (norma) do vetor $\vec{v}$ é denotado por $\boxed{\|\vec{v}\|}$.

NÃO ESQUEÇA DE POR SEU NOME
NA FOLHA DE RESPOSTAS!!!

$\boxed{\textbf{A}}$

Questão 1. *Seja S uma esfera de centro $C = (1, 1, 0)$, e suponha que a interseção de S com o plano $\pi : -3y + 4z = 2$ seja um círculo de raio $r = 1$. Calcule o raio R de S.*

(a) $R = \frac{1}{5}$;
(b) $R = 2$;
(c) $R = \sqrt{2}$;
(d) $R = \frac{1}{\sqrt{3}}$;
(e) $R = \frac{1}{2}$.

Questão 2. *Considere as retas*

$$r_1 : \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 4 + \lambda \\ z = -1 - \lambda \end{cases} \quad e \quad r_2 : \begin{cases} x = 4 + s \\ y = -s \\ z = -1 - 3s, \end{cases} \qquad \lambda, s \in \mathbb{R}.$$

Determine o plano π tal que:

$$\text{dist}(\pi, r_1) = \frac{1}{3}\text{dist}(r_1, r_2) \quad e \quad \text{dist}(\pi, r_2) = \frac{2}{3}\text{dist}(r_1, r_2).$$

(a) $\pi : 2x - y + 5z = 6$;
(b) $\pi : 2x - y + z = 3$;
(c) $\pi : 2x - 5y + z = 3$;
(d) $\pi : 2x - 4y + 5z = 5$;
(e) $\pi : 2x - 2y + z = 4$.

Questão 3. *Considere os planos*

$$\pi_1 : mx - ny + z = 2 \quad e \quad \pi_2 : nx - my + nz = 4.$$

Determine $m, n \in \mathbb{R}$ de modo que $\pi_1 \cap \pi_2$ seja uma reta perpendicular ao vetor $\vec{v} = (2, 1, -1)$ e que passa pelo ponto $A = (0, 0, 2)$.

(a) $n = 2$ e $m = 10$;
(b) $n = 2$ e $m = \pm\sqrt{10}$;
(c) $n = \sqrt{2}$ e $m = 8$;
(d) $n = \sqrt{2}$ e $m = \pm\sqrt{10}$;
(e) $n = 4$ e $m = \sqrt{10}$.

Questão 4. *Qual é o nome correto do professor deste curso?*

(a) Paolo Picionne;
(b) Paulo Picionne;
(c) Paulo Paccione;
(d) Paulo Picione;
(e) Paolo Piccione.

Questão 5. *Considere a cônica de equação* $2x^2 - xy - y^2 - 2 = 0$ *em* $\mathbb{E}^2$. *Sejam* (u, v) *coordenadas ortonormais no plano obtidas por uma rotação de um ângulo* θ *do sistema de coordenadas* (x, y). *Assuma que no sistema de coordenadas* (u, v) *a equação da cônica seja da forma* $Au^2 + Bv^2 + C = 0$. *Calcule a tangente de* 2θ.

(a) $\tan(2\theta) = -\frac{5}{2}$;
(b) $\tan(2\theta) = \frac{5}{3}$;
(c) $\tan(2\theta) = \frac{3}{2}$;
(d) $\tan(2\theta) = -\frac{1}{3}$;
(e) $\tan(2\theta) = -\frac{7}{3}$.

Questão 6. *Calcule* $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) 4;
(b) 0;
(c) -2;
(d) 1;
(e) -6.

Questão 7. *Determine a posição relativa das esferas:*

$$S_1 : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z = 0,$$
$$S_2 : x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y + 2z + 2 = 0.$$

(a) S_1 está contida na parte exterior de S_2, e é tangente a S_2;
(b) S_1 está contida na parte interior de S_2, e $S_1 \cap S_2$ é um círculo de raio $r = \frac{1}{4}$;
(c) S_1 está contida na parte interior de S_2, e $S_1 \cap S_2 = \emptyset$;
(d) S_1 está contida na parte interior de S_2, e é tangente a S_2;
(e) S_1 está contida na parte exterior de S_2, e $S_1 \cap S_2 = \emptyset$.

Questão 8. *Calcule o produto triplo* $(\vec{v}_2 \times \vec{v}_1) \cdot \vec{v}_3$, *onde* $\vec{v}_1 = (2, 0, 0)_E$, $\vec{v}_2 = (4, 3, 0)_E$ *e* $\vec{v}_3 = (2, -2, -1)_E$.

(a) 3;
(b) 0;
(c) -6;
(d) -3;
(e) 6.

Questão 9. *Dados os vetores $\vec{v}_1 = (2,0,1)_E$ e $\vec{v}_2 = (1,1,1)_E$, determine um vetor $\vec{v}_3$ de **comprimento igual a 3**, ortogonal a $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, e tal que a base $B = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ seja orientada **negativamente**.*

(a) $\vec{v}_3 = \left(\frac{3}{\sqrt{6}}, \frac{3}{\sqrt{6}}, -\frac{6}{\sqrt{6}}\right)$;
(b) $\vec{v}_3 = \left(-\frac{3}{\sqrt{6}}, -\frac{3}{\sqrt{6}}, \frac{6}{\sqrt{6}}\right)$;
(c) $\vec{v}_3 = \left(-\frac{3}{\sqrt{6}}, -\frac{3}{\sqrt{6}}, -\frac{6}{\sqrt{6}}\right)$;
(d) $\vec{v}_3 = \left(-\frac{3}{\sqrt{6}}, \frac{3}{\sqrt{6}}, -\frac{6}{\sqrt{6}}\right)$;
(e) $\vec{v}_3 = \left(\frac{3}{\sqrt{6}}, \frac{3}{\sqrt{6}}, \frac{6}{\sqrt{6}}\right)$.

Questão 10. *O plano $\pi : x + y - z + 2 = 0$ em $\mathbb{E}^3$ intercepta os eixos cartesianos nos pontos A,B e C. Calcular a área do triângulo ABC.*

(a) $\sqrt{3}$;
(b) $2\sqrt{2}$;
(c) $3\sqrt{3}$;
(d) 2;
(e) $2\sqrt{3}$.

Questão 11. *Seja S uma esfera de centro $C = (3,2,1)$, e suponha que o plano $\pi : x + z + 1 = 0$ seja tangente a S. Calcule o raio de S.*

(a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$;
(b) $\frac{3}{\sqrt{5}}$;
(c) $\frac{5}{\sqrt{2}}$;
(d) $\frac{1}{\sqrt{3}}$;
(e) $\sqrt{3}$.

Questão 12. *Calcule a distância entre o ponto $P_0 = (-1,-2,1)$ e o plano $\pi : -2x + 4y - z + 1 = 0$.*

(a) $\frac{3}{\sqrt{5}}$;
(b) $\frac{2}{\sqrt{7}}$;
(c) $\frac{5}{\sqrt{3}}$;
(d) $\frac{7}{\sqrt{21}}$;
(e) $\frac{6}{\sqrt{21}}$.

Questão 13. *Determine a posição relativa das retas r e s dadas por:*

$$r : (1, 1, -1) + \lambda(2, -1, 3) \quad e \quad s : (5, 1, 5) + \lambda\big(1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}\big), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

(a) $r = s$;
(b) $r \cap s$ é um círculo de raio $\frac{1}{3}$;
(c) r e s são reversas;
(d) r e s são paralelas, e $r \neq s$;
(e) r e s são concorrentes, $r \neq s$.

Questão 14. *Dada a matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, *seja* $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$ *sua matriz inversa. Calcule* b_{23}.

(a) A não admite inversa;
(b) 0;
(c) -1;
(d) 3;
(e) 2.

Questão 15. *Determine a equação da esfera S em $\mathbb{E}^3$ com centro no ponto $C = (-1, 1, -2)$ e raio $R = \sqrt{6}$*

(a) $S : x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 4z = 0$;
(b) $S : x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 4z = 0$;
(c) $S : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 2z = 0$;
(d) $S : x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y + 4z = 0$;
(e) $S : x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y + 4z = 0$.

Questão 16. *Considere o ponto $A = (1, 2, 1)$ e a reta*

$$r : \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$$

Ache a equação cartesiana do plano π que contém a reta r e o ponto A.

(a) $\pi : 3x - y + 2z = 2$;
(b) $\pi : 4x - y + 2z = 4$;
(c) $\pi : 4x + y + 2z = 5$;
(d) $\pi : 4x - y - 2z = 3$;
(e) $\pi : 2x - y - 2z = 4$.

Questão 17. *Determine o valor da constante m para que seja de 30^o o ângulo entre os planos:*

$$\pi_1 : x + my + 2z - 7 = 0 \quad e \quad \pi_2 : 4x + 5y + 3z - 2 = 0.$$

(a) $m = \pm 3$;
(b) $m = 1$ ou $m = 7$;
(c) $m = 5$ ou $m = 7$;
(d) $m = -1$ ou $m = 3$;
(e) $m = \pm 5$.

Questão 18. *Seja B uma base de $\mathbb{V}^3$. Para quais valores da constante λ os vetores $\vec{v}_1 = (\lambda, \lambda, 2)_B$, $\vec{v}_2 = (\lambda, -1, -\lambda)_B$ e $\vec{v}_3 = (2\lambda, 1, -\lambda)_B$ são linearmente dependentes?*

(a) $\lambda = 0, 1 \pm \sqrt{5}$;
(b) $\lambda = 0$;
(c) $\lambda = \pm\sqrt{5}$;
(d) $\lambda = 0, 1 \pm \sqrt{7}$;
(e) $\lambda = 0, \pm 1$.

Questão 19. *Sejam $P = (1, 0, 1)$ e $Q = (0, 1, 1)$. Ache um ponto C da reta PQ tal que a área do triângulo ABC onde $A = (3, -2, 1)$ e $B = (0, 0, 1)$ seja $\frac{1}{2}$.*

(a) $C = (1, -1, 1)$ ou $C = (1, -3, 1)$;
(b) $C = (1, -1, 1)$ ou $C = (4, 3, 1)$;
(c) $C = (2, -1, -1)$ ou $C = (2, -2, 1)$;
(d) $C = (2, 1, 1)$ ou $C = (4, -3, -1)$;
(e) $C = (2, -1, 1)$ ou $C = (4, -3, 1)$.

Questão 20. *Determine o ângulo entre a reta $X = (6, 7, 0) + (-2, -2, 0)\lambda$ e o plano $X = (8, -4, 2) + \lambda \cdot (1, 0, -2) + \mu \cdot (1, -2, 0)$.*

(a) $\dfrac{\pi}{2}$;
(b) $\dfrac{\pi}{6}$;
(c) $\dfrac{2}{3}\pi$;
(d) $\dfrac{\pi}{3}$;
(e) $\dfrac{\pi}{4}$.

MAT 112

Vetores e Geometria
Prof. P. P.
Prova SUB
06 de julho de 2017

Nome (legível!!): ______________________________

Número USP: ______________________________

Assinatura: ______________________________

Folha de Respostas $\boxed{\mathbf{A}}$

Marque aqui sua turma: ☐ 2017146 (IME) ☐ 2017134 (IAG)

1	a	b	c	d	e
2	a	b	c	d	e
3	a	b	c	d	e
4	a	b	c	d	e
5	a	b	c	d	e
6	a	b	c	d	e
7	a	b	c	d	e
8	a	b	c	d	e
9	a	b	c	d	e
10	a	b	c	d	e
11	a	b	c	d	e
12	a	b	c	d	e
13	a	b	c	d	e
14	a	b	c	d	e
15	a	b	c	d	e
16	a	b	c	d	e
17	a	b	c	d	e
18	a	b	c	d	e
19	a	b	c	d	e
20	a	b	c	d	e

Deixe em branco.

Corretas	Erradas	Nota