

MAT 112 — Turma 2017134

Vetores e Geometria

Prof. Paolo Piccione

Prova 2

29 de junho de 2017

Nome: _____

Número USP: _____

Assinatura: _____

Instruções

- A duração da prova é de **uma hora e quarenta minutos**.
- Assinale as alternativas corretas na **folha de respostas** que está no final da prova.
É permitido deixar questões em branco.
- Cada questão tem apenas **uma resposta correta**.
- O valor total da prova é de **10** pontos; cada questão correta vale $\frac{1}{2}$ ponto (0.5) e, **caso houver mais de três respostas erradas**, *cada questão errada implica num desconto de $\frac{1}{10}$ de ponto* (0.10).
- No final da prova, deve ser entregue apenas a folha de respostas (na última página).
- **Boa Prova!**

Terminologia e Notações Utilizadas na Prova

- \mathbb{E}^2 e \mathbb{E}^3 denotam respectivamente o plano e o espaço euclidiano.
- Onde não especificado diversamente, todos os sistemas de coordenadas em \mathbb{E}^2 e em \mathbb{E}^3 são ortonormais.

***NÃO ESQUEÇA DE POR SEU NOME
NA FOLHA DE RESPOSTAS!!!***

E

Questão 1. *Determine a posição relativa das esferas:*

$$S_1 : x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y + 4z + 5 + 4\sqrt{3} = 0,$$

$$S_2 : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 2z - 1 = 0.$$

- (a) S_1 está contida na parte interior de S_2 , e $S_1 \cap S_2 = \emptyset$;
- (b) S_1 está contida na parte interior de S_2 , e é tangente a S_2 ;
- (c) S_1 está contida na parte interior de S_2 , e $S_1 \cap S_2$ é um círculo de raio $r = \frac{1}{4}$;
- (d) S_1 está contida na parte exterior de S_2 , e $S_1 \cap S_2 = \emptyset$;
- (e) S_1 está contida na parte exterior de S_2 , e é tangente a S_2 .

Questão 2. *Calcule a distância entre as retas:*

$$\begin{aligned} r_1 &: (2, 1, 0) + \lambda(1, 1, 1) \\ r_2 &: (1, 1, -1) + \lambda(2, 2, 0), \end{aligned} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

- (a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$;
- (b) $\frac{3}{\sqrt{5}}$;
- (c) $\frac{1}{\sqrt{5}}$;
- (d) $\frac{1}{\sqrt{3}}$;
- (e) $\frac{3}{\sqrt{2}}$.

Questão 3. *Considere a cônica de equação $3x^2 - 3xy + y^2 - 2 = 0$ em \mathbb{E}^2 . Sejam (u, v) coordenadas ortonormais no plano obtidas por uma rotação de um ângulo θ do sistema de coordenadas (x, y) . Assuma que no sistema de coordenadas (u, v) a equação da cônica seja da forma $Au^2 + Bv^2 + C = 0$. Calcule a tangente de 2θ .*

- (a) $\tan(2\theta) = -\frac{7}{2}$;
- (b) $\tan(2\theta) = -\frac{5}{2}$;
- (c) $\tan(2\theta) = \frac{5}{2}$;
- (d) $\tan(2\theta) = \frac{3}{2}$;
- (e) $\tan(2\theta) = -\frac{3}{2}$.

Questão 4. Determine a interseção $S_1 \cap S_2$, onde S_1 e S_2 são as esferas em \mathbb{E}^3 de equação:

$$S_1 : 4x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 16x - 8y + 8z + 7 = 0$$

$$S_2 : 4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 8y - 16z + 3 = 0.$$

- (a) $S_1 \cap S_2 = \emptyset$;
- (b) as equações dadas não correspondem a esferas;
- (c) $S_1 \cap S_2 = \{P\}$, onde $P = (1, 0, \frac{1}{2})$;
- (d) $S_1 \cap S_2$ é um círculo de raio $\frac{\sqrt{17}}{2}$;
- (e) $S_1 \cap S_2$ é um círculo de raio $\frac{17}{2}$.

Questão 5. Seja S_1 a esfera de centro $C_1 = (1, 2, 1)$ e raio $R_1 = \frac{3}{\sqrt{2}}$ e S_2 a esfera de centro $C_2 = (0, 1, 3)$ e raio $R_2 = R_1$. Determine a equação do plano π tangente a S_1 e a S_2 no ponto de interseção entre S_1 e S_2 .

- (a) $\pi : x + y - z + 2 = 0$;
- (b) $\pi : x + y - 2z - 2 = 0$;
- (c) $\pi : x - y - 2z + 2 = 0$;
- (d) $\pi : x + y - 2z + 2 = 0$;
- (e) $\pi : -x + y - 2z + 2 = 0$.

Questão 6. Determine a posição relativa das retas r e s dadas por:

$$r : (1, -1, -1) + \lambda(2, 1, 3) \quad e \quad s : (5, 1, 5) + \lambda(1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

- (a) $r = s$;
- (b) r e s são concorrentes;
- (c) r e s são paralelas, e $r \neq s$;
- (d) $r \cap s$ é um círculo de raio $\frac{1}{2}$;
- (e) r e s são reversas.

Questão 7. Determine a posição relativa das retas de equações vetoriais:

$$\begin{aligned} r_1 &: (2, 1, 0) + \lambda(1, 1, 1) \\ r_2 &: (1, 0, -1) + \lambda(2, 2, 0), \end{aligned} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

- (a) as retas coincidem;
- (b) as retas possuem exatamente dois pontos em comum;
- (c) as retas são reversas;
- (d) as retas são paralelas;
- (e) as retas são concorrentes.

Questão 8. Seja S uma esfera de centro $C = (2, 1, -1)$, e suponha que o plano $\pi : x + z + 1 = 0$ seja tangente a S . Calcule o raio de S .

- (a) $\frac{1}{\sqrt{3}}$;
- (b) $\frac{3}{\sqrt{5}}$;
- (c) $\sqrt{2}$;
- (d) $\sqrt{3}$;
- (e) $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Questão 9. Determine o ângulo entre a reta $X = (6, 7, 0) + (1, 1, 0)\lambda$ e o plano $X = (8, -4, 2) + \lambda \cdot (-1, 0, 2) + \mu \cdot (1, -2, 0)$.

- (a) $\frac{\pi}{3}$;
- (b) $\frac{\pi}{4}$;
- (c) $\frac{2}{3}\pi$;
- (d) $\frac{\pi}{6}$;
- (e) $\frac{\pi}{2}$.

Questão 10. Considere o ponto $A = (1, 2, 1)$ e a reta

$$r : \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$$

Determine a equação do plano π que contém a reta r e o ponto A .

- (a) $\pi : 4x - y = 5$;
- (b) $\pi : x - 7y + 2z = 5$;
- (c) $\pi : x - 3y + 2z = 1$;
- (d) $\pi : x - 2y + 2z = 4$;
- (e) $\pi : 4x - y + 2z = 4$.

Questão 11. Escreva a equação do plano π perpendicular à direção do vetor $\vec{v} = (1, 1, -1)$ e passante por $P_0 = (-2, -1, 3)$.

- (a) $\pi : x + y - z - 6 = 0$;
- (b) $\pi : x + y + z + 6 = 0$;
- (c) $\pi : x - y - z + 6 = 0$;
- (d) $\pi : -x + y - z + 6 = 0$;
- (e) $\pi : x + y - z + 6 = 0$.

Questão 12. Calcule a distância entre o ponto $P_0 = (1, 2, -1)$ e o plano $\pi : 2x - 4y + z - 1 = 0$.

- (a) $\frac{3}{\sqrt{5}}$;
- (b) $\frac{7}{\sqrt{2}}$;
- (c) $\frac{5}{\sqrt{3}}$;
- (d) $\frac{8}{\sqrt{21}}$;
- (e) $\frac{2}{\sqrt{7}}$.

Questão 13. O plano $\pi : x + y - z - 2 = 0$ em \mathbb{E}^3 intercepta os eixos cartesianos nos pontos A, B e C . Calcular a área do triângulo ABC .

- (a) $3\sqrt{3}$;
- (b) 2;
- (c) $2\sqrt{3}$;
- (d) $2\sqrt{2}$;
- (e) $\sqrt{3}$.

Questão 14. Determine a equação paramétrica da reta que passa pelo ponto $A = (3, 2, 1)$ e é simultaneamente ortogonal às retas

$$r_1 : \begin{cases} x = 3 \\ z = 1 \end{cases} \quad e \quad r_2 : \begin{cases} y = -2x + 1 \\ z = -x - 3. \end{cases}$$

- (a) $r : \begin{cases} x = 3 - 4\lambda \\ y = 2 \\ z = 1 - 2\lambda; \end{cases}$
- (b) $r : \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2 \\ z = 1 - 2\lambda; \end{cases}$
- (c) $r : \begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 1 - \lambda; \end{cases}$
- (d) $r : \begin{cases} x = 4 - \lambda \\ y = 2 + 3\lambda \\ z = 5 - \lambda; \end{cases}$
- (e) $r : \begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = 2 \\ z = 1 - \lambda. \end{cases}$

Questão 15. Considere a esfera $S : (x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z + 3)^2 = 25$. Determine os centros dos círculos de raio 4, contidos em S , e com centro sobre a reta $r : (1, -2, 0) + \lambda(2, 1, -1)$.

- (a) $C_1 = (3, -1, 1)$ e $C_2 = (1, -2, 0)$;
- (b) $C_1 = (3, 1, -1)$ e $C_2 = (1, -2, 0)$;
- (c) $C_1 = (3, -1, -1)$ e $C_2 = (1, -2, 0)$;
- (d) $C_1 = (3, -1, -1)$ e $C_2 = (-1, -2, 0)$;
- (e) $C_1 = (3, -1, -1)$ e $C_2 = (1, -2, 3)$.

Questão 16. Calcule a distância entre o ponto $P_0 = (0, 1, -2)$ e a reta $r : (1, 2, 1) + \lambda(1, -2, 1)$.

- (a) $\sqrt{\frac{17}{5}}$;
- (b) $\sqrt{\frac{31}{3}}$;
- (c) $\sqrt{\frac{31}{7}}$;
- (d) $\sqrt{\frac{31}{5}}$;
- (e) $\sqrt{\frac{17}{3}}$.

Questão 17. Seja S uma esfera de centro $C = (2, 1, 0)$, e suponha que a interseção de S com o plano $\pi : 2x - 3y + 4z = 2$ seja um círculo de raio $r = \sqrt{\frac{28}{29}}$. Calcule o raio R de S .

- (a) $R = 2$;
- (b) $R = 1$;
- (c) $R = \frac{1}{3}$;
- (d) $R = \frac{1}{5}$;
- (e) $R = \frac{1}{2}$.

Questão 18. Escreva uma equação cartesiana do plano:

$$\pi : \begin{cases} x = 1 + \lambda - \mu \\ y = 2\lambda + \mu \\ z = 3 - \mu \end{cases}$$

- (a) $\pi : 2x + y + 3z - 7 = 0$;
- (b) $\pi : -2x + y + 3z - 7 = 0$;
- (c) $\pi : -2x - y + 3z - 7 = 0$;
- (d) $\pi : -2x + y + 3z + 7 = 0$;
- (e) $\pi : -2x + y + z - 7 = 0$.

Questão 19. *Determine a equação da esfera S em \mathbb{E}^3 com centro no ponto $C = (1, 1, 2)$ e raio $R = \sqrt{6}$*

- (a) $S : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 4z = 0$;
- (b) $S : x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 4z = 0$;
- (c) $S : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 4z = 0$;
- (d) $S : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 2z = 0$;
- (e) $S : x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y + 4z = 0$.

Questão 20. *Que letra é Σ ?*

- (a) epsilon minúsculo (alfabeto grego);
- (b) âleph (alfabeto árabe);
- (c) Sigma maiúsculo (alfabeto grego);
- (d) Epsilon maiúsculo (alfabeto grego);
- (e) sigma minúsculo (alfabeto grego).

MAT 112
Vetores e Geometria
Prof. Paolo Piccione
Prova 2
29 de junho de 2017

Nome: _____

Número USP: _____

Assinatura: _____

Folha de Respostas **E**

Turma: 2017134

| | | | | | |
|-----------|---|---|---|---|---|
| 1 | a | b | c | d | e |
| 2 | a | b | c | d | e |
| 3 | a | b | c | d | e |
| 4 | a | b | c | d | e |
| 5 | a | b | c | d | e |
| 6 | a | b | c | d | e |
| 7 | a | b | c | d | e |
| 8 | a | b | c | d | e |
| 9 | a | b | c | d | e |
| 10 | a | b | c | d | e |
| 11 | a | b | c | d | e |
| 12 | a | b | c | d | e |
| 13 | a | b | c | d | e |
| 14 | a | b | c | d | e |
| 15 | a | b | c | d | e |
| 16 | a | b | c | d | e |
| 17 | a | b | c | d | e |
| 18 | a | b | c | d | e |
| 19 | a | b | c | d | e |
| 20 | a | b | c | d | e |

Deixe em branco.

| Corretas | Erradas | Nota |
|-----------------|----------------|-------------|
| | | |