

MAT 112 — Turma 2017146

Vetores e Geometria

Prof. Paolo Piccione

Prova 2

29 de junho de 2017

Nome: \_\_\_\_\_

Número USP: \_\_\_\_\_

Assinatura: \_\_\_\_\_

### Instruções

- A duração da prova é de **uma hora e quarenta minutos**.
- Assinale as alternativas corretas na **folha de respostas** que está no final da prova.  
*É permitido deixar questões em branco.*
- Cada questão tem apenas **uma resposta correta**.
- O valor total da prova é de **10** pontos; cada questão correta vale  $\frac{1}{2}$  ponto (0.5) e, **caso houver mais de três respostas erradas**, *cada questão errada implica num desconto de  $\frac{1}{10}$  de ponto* (0.10).
- No final da prova, deve ser entregue apenas a folha de respostas (na última página).
- **Boa Prova!**

### Terminologia e Notações Utilizadas na Prova

- $\mathbb{E}^2$  e  $\mathbb{E}^3$  denotam respectivamente o plano e o espaço euclidiano.
- Onde não especificado diversamente, todos os sistemas de coordenadas em  $\mathbb{E}^2$  e em  $\mathbb{E}^3$  são ortonormais.

***NÃO ESQUEÇA DE POR SEU NOME  
NA FOLHA DE RESPOSTAS!!!***

**A**

**Questão 1.** Considere o ponto  $A = (1, 2, 1)$  e a reta

$$r : \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$$

Determine a equação do plano  $\pi$  que contém a reta  $r$  e o ponto  $A$ .

- (a)  $\pi : 4x - y + 2z = 4$ ;
- (b)  $\pi : 4x - y = 5$ ;
- (c)  $\pi : x - 3y + 2z = 1$ ;
- (d)  $\pi : x - 7y + 2z = 5$ ;
- (e)  $\pi : x - 2y + 2z = 4$ .

**Questão 2.** Calcule a distância entre as retas:

$$\begin{aligned} r_1 &: (2, 1, 0) + \lambda(1, 1, 1) \\ r_2 &: (1, 1, -1) + \lambda(2, 2, 0), \end{aligned} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

- (a)  $\frac{3}{\sqrt{2}}$ ;
- (b)  $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ;
- (c)  $\frac{1}{\sqrt{5}}$ ;
- (d)  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ;
- (e)  $\frac{3}{\sqrt{5}}$ .

**Questão 3.** Determine a posição relativa das retas de equações vetoriais:

$$\begin{aligned} r_1 &: (2, 1, 0) + \lambda(1, 1, 1) \\ r_2 &: (1, 0, -1) + \lambda(2, 2, 0), \end{aligned} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

- (a) as retas são concorrentes;
- (b) as retas coincidem;
- (c) as retas possuem exatamente dois pontos em comum;
- (d) as retas são reversas;
- (e) as retas são paralelas.

**Questão 4.** Que letra é  $\Sigma$ ?

- (a) epsilon minúsculo (alfabeto grego);
- (b) Sigma maiúsculo (alfabeto grego);
- (c) Epsilon maiúsculo (alfabeto grego);
- (d) âleph (alfabeto árabe);
- (e) sigma minúsculo (alfabeto grego).

**Questão 5.** *Determine a equação da esfera  $S$  em  $\mathbb{E}^3$  com centro no ponto  $C = (1, 1, 2)$  e raio  $R = \sqrt{6}$*

- (a)  $S : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 4z = 0;$
- (b)  $S : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 2z = 0;$
- (c)  $S : x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 4z = 0;$
- (d)  $S : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 4z = 0;$
- (e)  $S : x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y + 4z = 0.$

**Questão 6.** *Determine a posição relativa das retas  $r$  e  $s$  dadas por:*

$$r : (1, -1, -1) + \lambda(2, 1, 3) \quad e \quad s : (5, 1, 5) + \lambda\left(1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

- (a)  $r \cap s$  é um círculo de raio  $\frac{1}{2};$
- (b)  $r = s;$
- (c)  $r$  e  $s$  são paralelas, e  $r \neq s;$
- (d)  $r$  e  $s$  são reversas;
- (e)  $r$  e  $s$  são concorrentes.

**Questão 7.** *Escreva a equação do plano  $\pi$  perpendicular à direção do vetor  $\vec{v} = (1, 1, -1)$  e passante por  $P_0 = (-2, -1, 3)$ .*

- (a)  $\pi : x + y - z + 6 = 0;$
- (b)  $\pi : x - y - z + 6 = 0;$
- (c)  $\pi : x + y - z - 6 = 0;$
- (d)  $\pi : -x + y - z + 6 = 0;$
- (e)  $\pi : x + y + z + 6 = 0.$

**Questão 8.** *Seja  $S$  uma esfera de centro  $C = (2, 1, 0)$ , e suponha que a interseção de  $S$  com o plano  $\pi : 2x - 3y + 4z = 2$  seja um círculo de raio  $r = \sqrt{\frac{28}{29}}$ . Calcule o raio  $R$  de  $S$ .*

- (a)  $R = 1;$
- (b)  $R = \frac{1}{2};$
- (c)  $R = \frac{1}{5};$
- (d)  $R = 2;$
- (e)  $R = \frac{1}{3}.$

**Questão 9.** Seja  $S$  uma esfera de centro  $C = (2, 1, -1)$ , e suponha que o plano  $\pi : x + z + 1 = 0$  seja tangente a  $S$ . Calcule o raio de  $S$ .

- (a)  $\sqrt{3}$ ;
- (b)  $\sqrt{2}$ .
- (c)  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ;
- (d)  $\frac{3}{\sqrt{5}}$ ;
- (e)  $\frac{1}{\sqrt{3}}$ .

**Questão 10.** Seja  $S_1$  a esfera de centro  $C_1 = (1, 2, 1)$  e raio  $R_1 = \frac{3}{\sqrt{2}}$  e  $S_2$  a esfera de centro  $C_2 = (0, 1, 3)$  e raio  $R_2 = R_1$ . Determine a equação do plano  $\pi$  tangente a  $S_1$  e a  $S_2$  no ponto de interseção entre  $S_1$  e  $S_2$ .

- (a)  $\pi : x - y - 2z + 2 = 0$ ;
- (b)  $\pi : -x + y - 2z + 2 = 0$ ;
- (c)  $\pi : x + y - 2z - 2 = 0$ ;
- (d)  $\pi : x + y - z + 2 = 0$ ;
- (e)  $\pi : x + y - 2z + 2 = 0$ .

**Questão 11.** Determine a equação paramétrica da reta que passa pelo ponto  $A = (3, 2, 1)$  e é simultaneamente ortogonal às retas

$$r_1 : \begin{cases} x = 3 \\ z = 1 \end{cases} \quad e \quad r_2 : \begin{cases} y = -2x + 1 \\ z = -x - 3. \end{cases}$$

- (a)  $r : \begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = 2 \\ z = 1 - \lambda; \end{cases}$
- (b)  $r : \begin{cases} x = 3 - 4\lambda \\ y = 2 \\ z = 1 - 2\lambda; \end{cases}$
- (c)  $r : \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2 \\ z = 1 - 2\lambda; \end{cases}$
- (d)  $r : \begin{cases} x = 4 - \lambda \\ y = 2 + 3\lambda \\ z = 5 - \lambda; \end{cases}$
- (e)  $r : \begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 1 - \lambda. \end{cases}$

**Questão 12.** *Determine o ângulo entre a reta  $X = (6, 7, 0) + (1, 1, 0)\lambda$  e o plano  $X = (8, -4, 2) + \lambda \cdot (-1, 0, 2) + \mu \cdot (1, -2, 0)$ .*

- (a)  $\frac{\pi}{2}$ ;
- (b)  $\frac{\pi}{3}$ ;
- (c)  $\frac{2}{3}\pi$ ;
- (d)  $\frac{\pi}{6}$ ;
- (e)  $\frac{\pi}{4}$ .

**Questão 13.** *O plano  $\pi : x + y - z - 2 = 0$  em  $\mathbb{E}^3$  intercepta os eixos cartesianos nos pontos  $A, B$  e  $C$ . Calcule a área do triângulo  $ABC$ .*

- (a)  $2\sqrt{2}$ ;
- (b)  $\sqrt{3}$ ;
- (c)  $2\sqrt{3}$ ;
- (d) 2;
- (e)  $3\sqrt{3}$ .

**Questão 14.** *Considere a cônica de equação  $3x^2 - 3xy + y^2 - 2 = 0$  em  $\mathbb{E}^2$ . Sejam  $(u, v)$  coordenadas ortonormais no plano obtidas por uma rotação de um ângulo  $\theta$  do sistema de coordenadas  $(x, y)$ . Assuma que no sistema de coordenadas  $(u, v)$  a equação da cônica seja da forma  $Au^2 + Bv^2 + C = 0$ . Calcule a tangente de  $2\theta$ .*

- (a)  $\tan(2\theta) = \frac{5}{2}$ ;
- (b)  $\tan(2\theta) = -\frac{3}{2}$ ;
- (c)  $\tan(2\theta) = \frac{3}{2}$ ;
- (d)  $\tan(2\theta) = -\frac{7}{2}$ ;
- (e)  $\tan(2\theta) = -\frac{5}{2}$ .

**Questão 15.** *Determine a posição relativa das esferas:*

$$S_1 : x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y + 4z + 5 + 4\sqrt{3} = 0,$$

$$S_2 : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 2z - 1 = 0.$$

- (a)  $S_1$  está contida na parte exterior de  $S_2$ , e  $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ ;
- (b)  $S_1$  está contida na parte exterior de  $S_2$ , e é tangente a  $S_2$ ;
- (c)  $S_1$  está contida na parte interior de  $S_2$ , e  $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ ;
- (d)  $S_1$  está contida na parte interior de  $S_2$ , e  $S_1 \cap S_2$  é um círculo de raio  $r = \frac{1}{4}$ ;
- (e)  $S_1$  está contida na parte interior de  $S_2$ , e é tangente a  $S_2$ .

**Questão 16.** Considere a esfera  $S : (x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z + 3)^2 = 25$ . Determine os centros dos círculos de raio 4, contidos em  $S$ , e com centro sobre a reta  $r : (1, -2, 0) + \lambda(2, 1, -1)$ .

- (a)  $C_1 = (3, -1, -1)$  e  $C_2 = (1, -2, 3)$ ;
- (b)  $C_1 = (3, -1, -1)$  e  $C_2 = (-1, -2, 0)$ ;
- (c)  $C_1 = (3, -1, -1)$  e  $C_2 = (1, -2, 0)$ ;
- (d)  $C_1 = (3, 1, -1)$  e  $C_2 = (1, -2, 0)$ ;
- (e)  $C_1 = (3, -1, 1)$  e  $C_2 = (1, -2, 0)$ .

**Questão 17.** Calcule a distância entre o ponto  $P_0 = (0, 1, -2)$  e a reta  $r : (1, 2, 1) + \lambda(1, -2, 1)$ .

- (a)  $\sqrt{\frac{17}{3}}$ ;
- (b)  $\sqrt{\frac{31}{7}}$ ;
- (c)  $\sqrt{\frac{31}{3}}$ ;
- (d)  $\sqrt{\frac{31}{5}}$ ;
- (e)  $\sqrt{\frac{17}{5}}$ .

**Questão 18.** Determine a interseção  $S_1 \cap S_2$ , onde  $S_1$  e  $S_2$  são as esferas em  $\mathbb{E}^3$  de equação:

$$S_1 : 4x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 16x - 8y + 8z + 7 = 0$$

$$S_2 : 4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 8y - 16z + 3 = 0.$$

- (a) as equações dadas não correspondem a esferas;
- (b)  $S_1 \cap S_2$  é um círculo de raio  $\frac{17}{2}$ ;
- (c)  $S_1 \cap S_2 = \{P\}$ , onde  $P = (1, 0, \frac{1}{2})$ ;
- (d)  $S_1 \cap S_2$  é um círculo de raio  $\frac{\sqrt{17}}{2}$ ;
- (e)  $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ .

**Questão 19.** Escreva uma equação cartesiana do plano:

$$\pi : \begin{cases} x = 1 + \lambda - \mu \\ y = 2\lambda + \mu \\ z = 3 - \mu \end{cases}$$

- (a)  $\pi : -2x + y + 3z - 7 = 0$ ;
- (b)  $\pi : -2x + y + z - 7 = 0$ ;
- (c)  $\pi : 2x + y + 3z - 7 = 0$ ;
- (d)  $\pi : -2x - y + 3z - 7 = 0$ ;
- (e)  $\pi : -2x + y + 3z + 7 = 0$ .

**Questão 20.** Calcule a distância entre o ponto  $P_0 = (1, 2, -1)$  e o plano  $\pi : 2x - 4y + z - 1 = 0$ .

- (a)  $\frac{3}{\sqrt{5}}$ ;
- (b)  $\frac{7}{\sqrt{2}}$ ;
- (c)  $\frac{2}{\sqrt{7}}$ ;
- (d)  $\frac{5}{\sqrt{3}}$ ;
- (e)  $\frac{8}{\sqrt{21}}$ .

MAT 112  
Vetores e Geometria  
Prof. Paolo Piccione  
Prova 2  
29 de junho de 2017

Nome: \_\_\_\_\_

Número USP: \_\_\_\_\_

Assinatura: \_\_\_\_\_

**Folha de Respostas** **A**

Turma: 2017146

<b>1</b>	a	b	c	d	e
<b>2</b>	a	b	c	d	e
<b>3</b>	a	b	c	d	e
<b>4</b>	a	b	c	d	e
<b>5</b>	a	b	c	d	e
<b>6</b>	a	b	c	d	e
<b>7</b>	a	b	c	d	e
<b>8</b>	a	b	c	d	e
<b>9</b>	a	b	c	d	e
<b>10</b>	a	b	c	d	e
<b>11</b>	a	b	c	d	e
<b>12</b>	a	b	c	d	e
<b>13</b>	a	b	c	d	e
<b>14</b>	a	b	c	d	e
<b>15</b>	a	b	c	d	e
<b>16</b>	a	b	c	d	e
<b>17</b>	a	b	c	d	e
<b>18</b>	a	b	c	d	e
<b>19</b>	a	b	c	d	e
<b>20</b>	a	b	c	d	e

**Deixe em branco.**

<b>Corretas</b>	<b>Erradas</b>	<b>Nota</b>