MAT 112 — Turma 2017134

Vetores e Geometria

Prof. Paolo Piccione

Prova 1

2 de maio de 2017

Nome: ____

Número USP: ______________________________________

Assinatura: ____

Instruções

- A duração da prova é de **uma hora e quarenta minutos**.
- Assinale as alternativas corretas na **folha de respostas** que está no final da prova. *É permitido deixar questões em branco.*
- Cada questão tem apenas **uma resposta correta**.
- O valor total da prova é de **10** pontos; cada questão correta vale $\mathbf{\frac{1}{2}}$ ponto (0.5) e *cada questão errada implica num desconto de* $\mathbf{\frac{1}{10}}$ *de ponto* (0.10).
- No final da prova, deve ser entregue apenas a folha de respostas (na última página).
- **Boa Prova!**

Terminologia e Notações Utilizadas na Prova

- $\mathbb{Z}$ denota o conjunto dos números inteiros.
- Fixado um inteiro positivo k e dado $n \in \mathbb{Z}$, o símbulo $[n]_k$ denota a *classe de congruência módulo k de n.*
- No texto, $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ denota sempre uma base ortonormal e orientada positivamente de $\mathbb{V}^3$.
- Dados vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$, o produto vetorial de $\vec{v}$ e $\vec{w}$ é denotado por $\boxed{\vec{v} \times \vec{w}}$, e o produto escalar de $\vec{v}$ e $\vec{w}$ é $\boxed{\vec{v} \cdot \vec{w}}$. O comprimento (norma) do vetor $\vec{v}$ é denotado por $\boxed{\|\vec{v}\|}$.

NÃO ESQUEÇA DE POR SEU NOME
NA FOLHA DE RESPOSTAS!!!

$\boxed{\mathbf{A}}$

Questão 1. *Calcule o produto triplo* $(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_3$*, onde* $\vec{v}_1 = (2,0,0)_E$*,* $\vec{v}_2 = (4,3,0)_E$ *e* $\vec{v}_3 = (2,-2,-1)_E$*.*

(a) 6;
(b) -3;
(c) 3;
(d) -6;
(e) 0.

Questão 2. *Analise as afirmações* (i)*,* (ii) *e* (iii) *abaixo, coloque* (V) *para verdadeiro ou* (F) *para falso e em seguida marque a respectiva sequência correta:*

(i) *Seja* $\vec{v}$ *um vetor em* $\mathbb{V}^3$*, e seja* $\vec{u} \in \mathbb{V}^3$ *um vetor unitário (i.e., de comprimento* 1*).*
O vetor $\vec{w} = \vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{u})\vec{u}$ *é ortogonal a* $\vec{u}$*.*

(ii) *Se* $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$ *são linearmente independentes então* $\vec{w}_1 = \vec{u}+\vec{v}$ *e* $\vec{w}_2 = \vec{u}-\vec{v}$ *são linearmente independentes.*

(iii) *Se* E *é uma base ortonormal,* $\vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\right)_E$ *tem norma 1.*

(a) F, F, F;
(b) V, V, V;
(c) V, V, F;
(d) F, F, V;
(e) F, V, V.

Questão 3. *Dados os vetores* $\vec{v}_1 = (2,0,1)_E$ *e* $\vec{v}_2 = (1,1,1)_E$*, determine um vetor* $\vec{v}_3$ *de* ***comprimento igual a 2****, ortogonal a* $\vec{v}_1$ *e* $\vec{v}_2$*, e tal que a base* $B = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ *seja orientada* ***negativamente****.*

(a) $\vec{v}_3 = \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{4}{\sqrt{6}}\right)$;
(b) $\vec{v}_3 = \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{4}{\sqrt{6}}\right)$;
(c) $\vec{v}_3 = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{4}{\sqrt{6}}\right)$;
(d) $\vec{v}_3 = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{4}{\sqrt{6}}\right)$;
(e) $\vec{v}_3 = \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{4}{\sqrt{6}}\right)$.

Questão 4. *Seja* $B = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ *uma base de* $\mathbb{V}^3$*, tal que as seguintes identidades valem:*

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0,\ \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3 = 1,\ \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3 = -1,\ \|\vec{v}_1\|^2 = 2,\ \|\vec{v}_2\|^2 = 1, \|\vec{v}_3\|^2 = 3.$$

Calcule o produto escalar $\vec{v} \cdot \vec{w}$*, onde* $\vec{v} = (1, -1, 0)_B$ *e* $\vec{w} = (-1, 2, 3)_B$*.*

(a) -2;
(b) 0;
(c) -3;
(d) 3;
(e) 2.

Questão 5. *Qual é a classe de congruência módulo* 7 *do inteiro* -13*?*

(a) $[0]_7$;
(b) $[6]_7$;
(c) $[1]_7$;
(d) $[2]_7$;
(e) $[4]_7$.

Questão 6. *Dado um hexágono regular* $ABCDEF$ *no plano, com centro* O*, calcule:*

$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{FA}.$$

(a) $-\overrightarrow{AO}$;
(b) $6\,\overrightarrow{AO}$;
(c) $6\,\overrightarrow{AF}$;
(d) $-6\,\overrightarrow{AO}$;
(e) 0.

Questão 7. *Dada a matriz* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$*, seja* $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ *sua matriz inversa. Calcule* b_{21}*.*

(a) A não admite inversa;
(b) 1;
(c) -3;
(d) -1;
(e) 3.

Questão 8. *Considere os vetores* $\vec{v} = (1,2,1)_E$, $\vec{w} = (-1,1,0)_E$. *Calcule o cosseno do ângulo entre* $\vec{v}$ *e* $\vec{w}$.

(a) $\frac{1}{\sqrt{12}}$;
(b) $-\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}}$;
(c) $\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}}$;
(d) $-\frac{1}{\sqrt{12}}$;
(e) $\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}}$.

Questão 9. *Sejam* $\vec{v}$ *e* $\vec{w}$ *vetores linearmente independentes de* $\mathbb{V}^3$. *Quais das seguintes afirmações é verdadeira?*

(I) *O produto vetorial* $\vec{v} \times \vec{w}$ *é ortogonal ao vetor* $2\vec{v} + 3\vec{w}$.
(II) *Os vetores* $\vec{v}$, $\vec{w}$ *e* $\vec{v} \times \vec{w}$ *são linearmente independentes.*
(III) *O comprimento de* $\vec{v} \times \vec{w}$ *é maior que o produto dos comprimentos de* $\vec{v}$ *e* $\vec{w}$.

(a) As três afirmações são verdadeiras;
(b) É verdadeira apenas a afirmação (II);
(c) São verdadeiras apenas as afirmações (I) e (II);
(d) É verdadeira apenas a afirmação (I);
(e) As três afirmações são falsas.

Questão 10. *Dada a matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, *seja* $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$ *sua matriz inversa. Calcule* b_{32}.

(a) A não admite inversa;
(b) 0;
(c) -1;
(d) 3;
(e) 2.

Questão 11. *Calcule a área do paralelogramo determinado pelos vetores* $\vec{v} = (1,2,1)_E$ *e* $\vec{w} = (1,0,1)_E$.

(a) $3\sqrt{2}$;
(b) $2\sqrt{2}$;
(c) 1;
(d) 2;
(e) $2\sqrt{3}$.

Questão 12. *Qual das seguintes identidades é verdadeira para toda tripla de vetores* $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in \mathbb{V}^3$*?*

(a) $(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_3 = (\vec{v}_3 \times \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_1$;
(b) $(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_3 = (\vec{v}_1 \times \vec{v}_3) \cdot \vec{v}_2$;
(c) $(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_3 = (\vec{v}_2 \times \vec{v}_1) \cdot \vec{v}_3$;
(d) $(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_3 = -(\vec{v}_3 \times \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_1$;
(e) $(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_3 = -(\vec{v}_3 \times \vec{v}_1) \cdot \vec{v}_2$.

Questão 13. *Considere a base* $B = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ *formada pelos vetores* $\vec{v}_1 = (1,0,1)_E$, $\vec{v}_2 = (1,1,0)_E$ *e* $\vec{v}_3 = (0,0,1)_E$. *Seja* $(\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3)$ *a base ortonormal obtida de* B *pelo métods de Gram–Schmidt. Calcule o vetor* $\vec{w}_2$.

(a) $\vec{w}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,2,1)_E$;
(b) $\vec{w}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)_E$;
(c) $\vec{w}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,-1)_E$;
(d) $\vec{w}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,-1)_E$;
(e) $\vec{w}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,2,-1)_E$.

Questão 14. *Para quais valores da constante* λ *os vetores* $\vec{v}_1 = (\lambda, \lambda, 2)_E$, $\vec{v}_2 = (\lambda, -1, -\lambda)_E$ *e* $\vec{v}_3 = (2\lambda, 1, -\lambda)_E$ *são linearmente dependentes?*

(a) $\lambda = 0$;
(b) $\lambda = 0, 1 \pm \sqrt{7}$;
(c) $\lambda = 0, 1 \pm \sqrt{5}$;
(d) $\lambda = \pm\sqrt{5}$;
(e) $\lambda = 0, \pm 1$.

Questão 15. *Calcule a projeção ortogonal do vetor* $\vec{v} = (1,2,-1)_E$ *na direção do vetor* $\vec{w} = (-2,1,1)_E$.

(a) $\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}\right)_E$;
(b) $\left(\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)_E$;
(c) $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{6}\right)_E$;
(d) $\left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)_E$;
(e) $\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)_E$.

Questão 16. *Seja θ o ângulo entre os vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$. Qual é o comprimento do vetor $(\vec{v} \times \vec{w}) \times \vec{v}$?*

(a) $\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot |\sin\theta|$;

(b) $\|\vec{v}\|^2 \cdot \|\vec{w}\| \cdot |\sin\theta|$;

(c) $\|\vec{v}\|^2 \cdot \|\vec{w}\| \cdot \sin^2\theta$;

(d) $\|\vec{v}\|^2 \cdot \|\vec{w}\|^2 \cdot |\sin\theta|$;

(e) $\|\vec{v}\|^2 \cdot \|\vec{w}\| \cdot |\sin\theta \cos\theta|$.

Questão 17. *Determine α, β e γ de forma tal que os vetores $(1,\alpha,1)_E$, $(\beta,0,1)_E$ e $(1,1,\gamma)_E$ formem uma base ortogonal de $\mathbb{V}^3$.*

(a) $\alpha = -2$, $\beta = -1$, $\gamma = -1$;

(b) $\alpha = -2$, $\beta = -1$, $\gamma = 1$;

(c) $\alpha = 2$, $\beta = -1$, $\gamma = 1$;

(d) $\alpha = 2$, $\beta = 1$, $\gamma = -1$;

(e) $\alpha = -2$, $\beta = 1$, $\gamma = 1$.

Questão 18. *Seja $\mathcal{X} = \mathbb{R}$ o conjunto dos números reais, e $\mathcal{R} \subset \mathcal{X} \times \mathcal{X}$ a seguinte relação em $\mathcal{X}$:*

$$(x,y) \in \mathcal{R} \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \geq y.$$

Qual das seguintes afirmações é correta?

(a) $\mathcal{R}$ não é uma relação de equivalência, pois não é reflexiva;

(b) $\mathcal{R}$ não é uma relação de equivalência, pois $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}$;

(c) $\mathcal{R}$ não é uma relação de equivalência, pois não é transitiva;

(d) $\mathcal{R}$ não é uma relação de equivalência, pois não é simétrica;

(e) $\mathcal{R}$ é uma relação de equivalência.

Questão 19. *Considere a base $B = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ de $\mathbb{V}^3$, onde $\vec{v}_1 = (1,-1,1)_E$, $\vec{v}_2 = (-2,-1,0)_E$, e $\vec{v}_3 = (0,-1,1)_E$. Calcule as componentes $(a,b,c)_B$ na base B do vetor $\vec{v} = (2,-1,1)_E$.*

(a) $(2,1,1)_B$;

(b) $(2,1,-1)_B$;

(c) $(2,0,-1)_B$;

(d) $(-2,0,3)_B$;

(e) $(-2,1,-1)_B$.

Questão 20. *Calcule* $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) -2;
(b) 1;
(c) 0;
(d) 2;
(e) -1.

MAT 112

Vetores e Geometria
Prof. Paolo Piccione
Prova 1
2 de maio de 2017

Nome: ____

Número USP: ______________________________________

Assinatura: _______________________________________

Folha de Respostas $\boxed{\textbf{A}}$

Turma: 2017134

1	a	b	c	d	e
2	a	b	c	d	e
3	a	b	c	d	e
4	a	b	c	d	e
5	a	b	c	d	e
6	a	b	c	d	e
7	a	b	c	d	e
8	a	b	c	d	e
9	a	b	c	d	e
10	a	b	c	d	e
11	a	b	c	d	e
12	a	b	c	d	e
13	a	b	c	d	e
14	a	b	c	d	e
15	a	b	c	d	e
16	a	b	c	d	e
17	a	b	c	d	e
18	a	b	c	d	e
19	a	b	c	d	e
20	a	b	c	d	e

Deixe em branco.

Corretas	**Erradas**	**Nota**