MAT 112 — Vetores e Geometria

Prof. Paolo Piccione

08 de Maio de 2013

Prova 1 — $\boxed{\textbf{G}}$

2013124

Nome: ____

Número USP: ____

Assinatura: ____

Instruções

- A duração da prova é de **uma hora e quarenta minutos**.
- Assinale as alternativas corretas na **folha de respostas** que está no final da prova. *É permitido deixar questões em branco.*
- Cada questão tem apenas **uma resposta correta**.
- O valor total da prova é de **10** pontos; cada questão correta vale $\mathbf{\frac{1}{2}}$ ponto (0.5) e *cada questão errada implica num desconto de* $\mathbf{\frac{1}{10}}$ *de ponto* (0.1).
- No final da prova, deve ser entregue apenas a folha de respostas (na última página)
- **Boa Prova!**

Terminologia e Notações Utilizadas na Prova

- $\mathbb{R}$ é o conjunto dos números reais. $\mathbb{Z}$ é o conjunto dos inteiros.
- $\mathbb{V}^2$ e $\mathbb{V}^3$ denotam respeitivamente o conjunto de vetores do plano e do espaço.
- Para $v, w \in \mathbb{V}^3$, $v \cdot w$ denota o produto escalar e $v \wedge w$ denota o produto vetorial de v e w.
- Dados vetores $v, w \in \mathbb{V}^3$, $\mathrm{Proj}_v(w)$ denota a projeção ortogonal de w na direção de v.
- Uma base *orientada positivamente* é o mesmo que uma base *destrógira*.

NÃO ESQUEÇA DE POR SEU NOME
NA FOLHA DE RESPOSTAS!!!

Questão 1. *Seja B uma base ortonormal. Determine x de modo que os vetores $u = (x, 1, 2x)_B$ e $v = (2, 1, 3)_B$ sejam ortogonais.*

(a) $x = 0$;
(b) $x = -\frac{1}{4}$;
(c) $x = \frac{1}{4}$;
(d) $x = -\frac{1}{8}$;
(e) $x = \frac{1}{8}$.

Questão 2. *Seja B uma base ortonormal. Calcule a área do paralelogramo gerado pelos vetores $v = (1, 1, 1)_B$ e $w = (3, 2, 1)_B$*

(a) $\sqrt{6}$;
(b) $\sqrt{3}$;
(c) 6;
(d) 3;
(e) $3 \sin \theta$.

Questão 3. *Determinar a origem A do segmento que representa o vetor $u = (4, 3, -1)$, sendo sua extremidade o ponto $B = (0, 4, 2)$.*

(a) $A = (-4, -1, 3)$;
(b) $A = (4, 1, 3)$;
(c) $A = (-4, 1, 3)$;
(d) $A = (4, -1, 3)$;
(e) $A = (4, -1, -3)$.

Questão 4. *Qual das seguintes afirmações é verdadeira?*

(a) Se v e w são vetores paralelos, então $v \cdot w \neq 0$;
(b) Se v e w são vetores não nulos ortogonais, então $v \wedge w \neq 0$;
(c) Se v e w são vetores ortogonais, então $v \wedge w \neq 0$;
(d) Se v e w são vetores não nulos ortogonais, então $v \cdot w \neq 0$;
(e) Se v e w são vetores não nulos paralelos, então $v \cdot w = 0$.

Questão 5. *Seja B uma base ortonormal de $\mathbb{V}^3$, considere os vetores $w = (a, b, c)_B$ e $v = (1, 2, -1)_B$. Determine o vetor t que é um múliplo positivo de* $\mathrm{Proj}_v(w)$ *e com norma igual a 2.*

(a) $t = \sqrt{\frac{2}{3}}(a, b, c)_B$;

(b) $t = \sqrt{\frac{2}{3}}\,(1, 2, -1)_B$;

(c) $t = \frac{2}{\sqrt{a^2+4b^2+c^2}}(a, 2b, -c)_B$;

(d) $t = \frac{2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}(a, 2b, -c)_B$;

(e) $t = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}(a, 2b, -c)_B$.

Questão 6. *Dado um hexágono regular $ABCDEF$ no plano, com centro O, calcule:*

$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{FA}.$$

(a) $6\,\overrightarrow{AF}$;

(b) $6\,\overrightarrow{AO}$;

(c) $-6\,\overrightarrow{AO}$;

(d) $-\overrightarrow{AO}$;

(e) 0.

Questão 7. *Num sistema de coordenadas $(\mathcal{B}, O)$, calcule a área do triângulo de vértices $A = (1, 2, 1)$, $B = (2, 0, 2)$ e $C = (-1, 1, 0)$.*

(a) $\sqrt{35}$;

(b) 7;

(c) $\frac{14}{3}$;

(d) $\frac{1}{2}\sqrt{35}$;

(e) $\frac{35}{2}$.

Questão 8. *Qual das seguintes identidades é verdadeira para toda tripla de vetores $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{V}^3$?*

(a) $(v_1 \wedge v_2) \cdot v_3 = (v_2 \wedge v_1) \cdot v_3$;

(b) $(v_1 \wedge v_2) \cdot v_3 = -(v_3 \wedge v_2) \cdot v_1$;

(c) $(v_1 \wedge v_2) \cdot v_3 = (v_1 \wedge v_3) \cdot v_2$;

(d) $(v_1 \wedge v_2) \cdot v_3 = -(v_3 \wedge v_1) \cdot v_2$;

(e) $(v_1 \wedge v_2) \cdot v_3 = (v_3 \wedge v_2) \cdot v_1$.

Questão 9. *Num sistema de coordenadas* (B, O)*, determine as equações paramétricas da reta que passa pelo ponto* $(1, -1, 1)$ *e paralela ao produto vetorial* $v \wedge w$*, onde* $v = (1, 1, 1)_B$ *e* $w = (2, 1, -1)_B$*.*

(a) $x = 1 + 2\lambda$, $y = 1 + 3\lambda$, $z = 1 - \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$;
(b) $x = 1 - 2\lambda$, $y = -1 + 3\lambda$, $z = 1 - \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$;
(c) $x = 1 - 2\lambda$, $y = 1 + 3\lambda$, $z = -1 - \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$;
(d) $x = 2 - \lambda$, $y = -1 - 3\lambda$, $z = 1 + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$;
(e) $x = 1 - \lambda$, $y = -1 - 3\lambda$, $z = 1 + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Questão 10. *Seja* B *uma base ortonormal orientada positivamente, e considere a nova base* $C = (v_1, v_2, v_3)$ *formada pelos vetores* $v_1 = (1, 0, 1)_B$*,* $v_2 = (1, 1, 0)_B$ *e* $v_3 = (0, 0, 1)_B$*. Seja* (w_1, w_2, w_3) *a base ortonormal obtida de* C *pelo métods de Gram–Schmidt. Calcule o vetor* w_2*.*

(a) $w_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 2, -1)$;
(b) $w_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, -1)$;
(c) $w_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 2, 1)$;
(d) $w_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1)$;
(e) $w_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, -1)$.

Questão 11. *Seja* B *uma base ortonormal, e* $v = (1, 2, 1)_B$*,* $w = (-1, 1, 0)_B$*. Calcule o cosseno do ângulo entre* v *e* w*.*

(a) $-\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}}$;
(b) $\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}}$;
(c) $\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}}$;
(d) $\frac{1}{\sqrt{12}}$;
(e) $-\frac{1}{\sqrt{12}}$.

Questão 12. *Seja $B = (v_1, v_2, v_3)$ uma base de $\mathbb{V}^3$, tal que as seguintes identidades valem:*

$$v_1 \cdot v_2 = 0,\ v_1 \cdot v_3 = 1,\ v_2 \cdot v_3 = -1,\ \|v_1\|^2 = 2,\ \|v_2\|^2 = 1, \|v_3\|^2 = 3.$$

Calcule o produto escalar $v \cdot w$, onde $v = (1, -1, 0)_B$ e $w = (-1, 2, 3)_B$.

(a) 2;
(b) -3;
(c) 3;
(d) 0;
(e) -2.

Questão 13. *Seja $B = (v_1, v_2, v_3)$ uma base ortonormal de $\mathbb{V}^3$. Calcule o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores $v_1 + 2v_2$, $v_2 + 2v_3$ e $v_3 + 2v_1$.*

(a) 4;
(b) -1;
(c) 8;
(d) 9;
(e) 1.

Questão 14. *Em qual situação $\|v + w\| = \|v\| + \|w\|$?*

(a) Quando um dos dois vetores é um múltiplo positivo do outro;
(b) Quando um dos dois vetores é um múltiplo do outro;
(c) Sempre;
(d) Quando v, w e $v \wedge w$ formam uma base de $\mathbb{V}^3$;
(e) Quando v e w são ortogonais.

Questão 15. *Num sistema de coordenadas (B, O), determine a equação vetorial da reta que passa por $(2, 0, -1)$ e pelo ponto médio do segmento de extremos $(2, 3, 1)$ e $(4, 1, -1)$.*

(a) $(2, 0, 1)) + \lambda\,(1, 2, 1),\ \lambda \in \mathbb{R}$;
(b) $(1, 2, 1) + \lambda\,(3, 2, 0),\ \lambda \in \mathbb{R}$;
(c) $(3, 2, 0) + \lambda\,(2, 0, 1),\ \lambda \in \mathbb{R}$;
(d) $(3, 2, 1) + \lambda\,(1, 3, 1),\ \lambda \in \mathbb{R}$;
(e) $(3, 2, 0) + \lambda\,(1, 2, 1),\ \lambda \in \mathbb{R}$.

Questão 16. *Seja (B, O) um sistema de coordenadas do espaço. Determine a equação vetorial da reta r que passa no ponto de coordenadas $(2, 1, -1)$ e paralela ao vetor $v = (-1, 1, 2)_B$.*

(a) $(x, y, z) = (2, 1, -1) + \lambda \cdot (-1, 1, 2),\ \lambda \in \mathbb{R}$;

(b) $x + y + z = (2, 1, -1) + \lambda \cdot (-1, 1, 2)$;

(c) $x = \vec{\imath},\ y = \vec{\jmath},\ z = \vec{k}$;

(d) $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}) = (-1, 2, 2) + \lambda \cdot (2, 1, -1)$;

(e) $(x, y, z) = (-1, 2, 2) + \lambda \cdot (2, 1, -1),\ \lambda \in \mathbb{R}$.

Questão 17. *Analise as afirmações* (i), (ii) *e* (iii) *abaixo, coloque* (V) *para verdadeiro ou* (F) *para falso e em seguida marque a respectiva sequência correta:*

(i) *Seja v um vetor em $\mathbb{V}^3$, e seja $u \in \mathbb{V}^3$ um vetor unitário. O vetor $w = v - (v \cdot u)u$ é ortogonal a u.*

(ii) *Se u e v são linearmente independentes então $w_1 = u+v$ e $w_2 = u-v$ são linearmente independentes.*

(iii) *Se B é uma base ortonormal, $u = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\right)_B$ tem norma 1.*

(a) F, V, V;

(b) F, F, F;

(c) V, V, V;

(d) F, F, V;

(e) V, V, F.

Questão 18. *Seja B uma base ortonormal. Calcule a projeção ortogonal de $w = (3, 2, 1)_B$ na direção do vetor $v = (1, 2, 3)_B$.*

(a) $\frac{7}{5}(1, 2, 3)_B$;

(b) $\frac{7}{5}(3, 2, 1)_B$;

(c) $\frac{5}{7}(1, 2, 3)_B$;

(d) $\frac{14}{\sqrt{10}}$;

(e) $\frac{5}{7}(3, 2, 1)_B$.

Questão 19. *Considere a seguinte relação* $R \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ *em* $\mathbb{Z}$*:*

$$R = \big\{(n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : n + m \textit{ é múltiplo de } 7\big\}.$$

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(a) R é uma relação simétrica;
(b) R é uma relação reflexiva;
(c) R é uma relação transitiva;
(d) R é o conjunto vazio;
(e) R é uma relação de equivalência.

Questão 20. *Sejam* v *e* w *dois vetores ortogonais, com* $\|v\| = 2$ *e* $\|w\| = 3$*. Calcule* $\|(v \wedge w) \wedge v\|$*.*

(a) 2;
(b) 12;
(c) 3;
(d) 6;
(e) 0.

MAT 112 — Vetores e Geometria
Turma 2013124

Prof. Paolo Piccione

Prova 1 — $\boxed{\textbf{G}}$

08 de Maio de 2013

Nome: ____

Número USP: ____

Assinatura: ____

Folha de Respostas

1	a	b	c	d	e
2	a	b	c	d	e
3	a	b	c	d	e
4	a	b	c	d	e
5	a	b	c	d	e
6	a	b	c	d	e
7	a	b	c	d	e
8	a	b	c	d	e
9	a	b	c	d	e
10	a	b	c	d	e
11	a	b	c	d	e
12	a	b	c	d	e
13	a	b	c	d	e
14	a	b	c	d	e
15	a	b	c	d	e
16	a	b	c	d	e
17	a	b	c	d	e
18	a	b	c	d	e
19	a	b	c	d	e
20	a	b	c	d	e

Deixe em branco.

Corretas	Erradas	Nota