

# MAT 112 — Vetores e Geometria

Prof. Paolo Piccione

08 de Maio de 2013

Prova 1 — A

2013122

Nome: \_\_\_\_\_

Número USP: \_\_\_\_\_

Assinatura: \_\_\_\_\_

## Instruções

- A duração da prova é de **uma hora e quarenta minutos**.
- Assinale as alternativas corretas na **folha de respostas** que está no final da prova. *É permitido deixar questões em branco.*
- Cada questão tem apenas **uma resposta correta**.
- O valor total da prova é de **10** pontos; cada questão correta vale  $\frac{1}{2}$  ponto (0.5) e *cada questão errada implica num desconto de  $\frac{1}{10}$  de ponto (0.1).*
- No final da prova, deve ser entregue apenas a folha de respostas (na última página)
- **Boa Prova!**

## Terminologia e Notações Utilizadas na Prova

- $\mathbb{R}$  é o conjunto dos números reais.  $\mathbb{Z}$  é o conjunto dos inteiros.
- $\mathbb{V}^2$  e  $\mathbb{V}^3$  denotam respectivamente o conjunto de vetores do plano e do espaço.
- Para  $v, w \in \mathbb{V}^3$ ,  $v \cdot w$  denota o produto escalar e  $v \wedge w$  denota o produto vetorial de  $v$  e  $w$ .
- Dados vetores  $v, w \in \mathbb{V}^3$ ,  $\text{Proj}_v(w)$  denota a projeção ortogonal de  $w$  na direção de  $v$ .
- Uma base *orientada positivamente* é o mesmo que uma base *destrógira*.

**NÃO ESQUEÇA DE POR SEU NOME  
NA FOLHA DE RESPOSTAS!!!**

**Questão 1.** *Seja  $B$  uma base ortonormal, e  $v = (1, 2, 1)_B$ ,  $w = (-1, 1, 0)_B$ . Calcule o cosseno do ângulo entre  $v$  e  $w$ .*

- (a)  $\frac{1}{\sqrt{12}}$ ;
- (b)  $\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}}$ ;
- (c)  $-\frac{1}{\sqrt{12}}$ ;
- (d)  $-\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}}$ ;
- (e)  $\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}}$ .

**Questão 2.** *Seja  $B$  uma base ortonormal de  $\mathbb{V}^3$ , considere os vetores  $w = (a, b, c)_B$  e  $v = (1, 2, -1)_B$ . Determine o vetor  $t$  que é um múltiplo positivo de  $\text{Proj}_v(w)$  e com norma igual a 2.*

- (a)  $t = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}(a, 2b, -c)_B$ ;
- (b)  $t = \sqrt{\frac{2}{3}}(1, 2, -1)_B$ ;
- (c)  $t = \frac{2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}(a, 2b, -c)_B$ ;
- (d)  $t = \sqrt{\frac{2}{3}}(a, b, c)_B$ ;
- (e)  $t = \frac{2}{\sqrt{a^2+4b^2+c^2}}(a, 2b, -c)_B$ .

**Questão 3.** *Seja  $B$  uma base ortonormal. Calcule a projeção ortogonal de  $w = (3, 2, 1)_B$  na direção do vetor  $v = (1, 2, 3)_B$ .*

- (a)  $\frac{5}{7}(3, 2, 1)_B$ ;
- (b)  $\frac{14}{\sqrt{10}}$ ;
- (c)  $\frac{7}{5}(3, 2, 1)_B$ ;
- (d)  $\frac{7}{5}(1, 2, 3)_B$ ;
- (e)  $\frac{5}{7}(1, 2, 3)_B$ .

**Questão 4.** *Seja  $(B, O)$  um sistema de coordenadas do espaço. Determine a equação vetorial da reta  $r$  que passa no ponto de coordenadas  $(2, 1, -1)$  e paralela ao vetor  $v = (-1, 1, 2)_B$ .*

- (a)  $(x, y, z) = (-1, 2, 2) + \lambda \cdot (2, 1, -1)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ ;
- (b)  $(x, y, z) = (2, 1, -1) + \lambda \cdot (-1, 1, 2)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ ;
- (c)  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) = (-1, 2, 2) + \lambda \cdot (2, 1, -1)$ ;
- (d)  $x = \vec{i}$ ,  $y = \vec{j}$ ,  $z = \vec{k}$ ;
- (e)  $x + y + z = (2, 1, -1) + \lambda \cdot (-1, 1, 2)$ .

**Questão 5.** *Seja  $B = (v_1, v_2, v_3)$  uma base de  $\mathbb{V}^3$ , tal que as seguintes identidades valem:*

$$v_1 \cdot v_2 = 0, \quad v_1 \cdot v_3 = 1, \quad v_2 \cdot v_3 = -1, \quad \|v_1\|^2 = 2, \quad \|v_2\|^2 = 1, \quad \|v_3\|^2 = 3.$$

*Calcule o produto escalar  $v \cdot w$ , onde  $v = (1, -1, 0)_B$  e  $w = (-1, 2, 3)_B$ .*

- (a)  $-2$ ;
- (b)  $3$ ;
- (c)  $2$ ;
- (d)  $0$ ;
- (e)  $-3$ .

**Questão 6.** *Em qual situação  $\|v + w\| = \|v\| + \|w\|$ ?*

- (a) Quando  $v$  e  $w$  são ortogonais;
- (b) Quando um dos dois vetores é um múltiplo do outro;
- (c) Quando  $v$ ,  $w$  e  $v \wedge w$  formam uma base de  $\mathbb{V}^3$ ;
- (d) Quando um dos dois vetores é um múltiplo positivo do outro;
- (e) Sempre.

**Questão 7.** *Qual das seguintes afirmações é verdadeira?*

- (a) Se  $v$  e  $w$  são vetores não nulos ortogonais, então  $v \cdot w \neq 0$ ;
- (b) Se  $v$  e  $w$  são vetores ortogonais, então  $v \wedge w \neq 0$ ;
- (c) Se  $v$  e  $w$  são vetores não nulos paralelos, então  $v \cdot w = 0$ ;
- (d) Se  $v$  e  $w$  são vetores não nulos ortogonais, então  $v \wedge w \neq 0$ ;
- (e) Se  $v$  e  $w$  são vetores paralelos, então  $v \cdot w \neq 0$ .

**Questão 8.** *Qual das seguintes identidades é verdadeira para toda tripla de vetores  $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{V}^3$ ?*

- (a)  $(v_1 \wedge v_2) \cdot v_3 = -(v_3 \wedge v_1) \cdot v_2$ ;
- (b)  $(v_1 \wedge v_2) \cdot v_3 = (v_2 \wedge v_1) \cdot v_3$ ;
- (c)  $(v_1 \wedge v_2) \cdot v_3 = (v_1 \wedge v_3) \cdot v_2$ ;
- (d)  $(v_1 \wedge v_2) \cdot v_3 = -(v_3 \wedge v_2) \cdot v_1$ ;
- (e)  $(v_1 \wedge v_2) \cdot v_3 = (v_3 \wedge v_2) \cdot v_1$ .

**Questão 9.** Dado um hexágono regular  $ABCDEF$  no plano, com centro  $O$ , calcule:

$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{FA}.$$

- (a)  $6 \overrightarrow{AO}$ ;
- (b)  $0$ ;
- (c)  $-6 \overrightarrow{AO}$ ;
- (d)  $-\overrightarrow{AO}$ ;
- (e)  $6 \overrightarrow{AF}$ .

**Questão 10.** Num sistema de coordenadas  $(B, O)$ , determine a equação vetorial da reta que passa por  $(2, 0, -1)$  e pelo ponto médio do segmento de extremos  $(2, 3, 1)$  e  $(4, 1, -1)$ .

- (a)  $(3, 2, 1) + \lambda(1, 3, 1)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ ;
- (b)  $(3, 2, 0) + \lambda(1, 2, 1)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ ;
- (c)  $(1, 2, 1) + \lambda(3, 2, 0)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ ;
- (d)  $(2, 0, 1) + \lambda(1, 2, 1)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ ;
- (e)  $(3, 2, 0) + \lambda(2, 0, 1)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**Questão 11.** Determinar a origem  $A$  do segmento que representa o vetor  $u = (4, 3, -1)$ , sendo sua extremidade o ponto  $B = (0, 4, 2)$ .

- (a)  $A = (4, -1, -3)$ ;
- (b)  $A = (4, -1, 3)$ ;
- (c)  $A = (-4, 1, 3)$ ;
- (d)  $A = (4, 1, 3)$ ;
- (e)  $A = (-4, -1, 3)$ .

**Questão 12.** Seja  $B$  uma base ortonormal. Calcule a área do paralelogramo gerado pelos vetores  $v = (1, 1, 1)_B$  e  $w = (3, 2, 1)_B$

- (a)  $\sqrt{3}$ ;
- (b)  $6$ ;
- (c)  $3 \sin \theta$ ;
- (d)  $3$ ;
- (e)  $\sqrt{6}$ .

**Questão 13.** Num sistema de coordenadas  $(\mathcal{B}, O)$ , calcule a área do triângulo de vértices  $A = (1, 2, 1)$ ,  $B = (2, 0, 2)$  e  $C = (-1, 1, 0)$ .

- (a)  $\frac{35}{2}$ ;
- (b)  $\frac{14}{3}$ ;
- (c)  $\sqrt{35}$ ;
- (d)  $\frac{1}{2}\sqrt{35}$ ;
- (e) 7.

**Questão 14.** Analise as afirmações (i), (ii) e (iii) abaixo, coloque (V) para verdadeiro ou (F) para falso e em seguida marque a respectiva sequência correta:

- (i) Seja  $v$  um vetor em  $\mathbb{V}^3$ , e seja  $u \in \mathbb{V}^3$  um vetor unitário. O vetor  $w = v - (v \cdot u)u$  é ortogonal a  $u$ .
- (ii) Se  $u$  e  $v$  são linearmente independentes então  $w_1 = u+v$  e  $w_2 = u-v$  são linearmente independentes.
- (iii) Se  $B$  é uma base ortonormal,  $u = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\right)_B$  tem norma 1.

- (a) V, V, F;
- (b) F, F, F;
- (c) F, V, V;
- (d) F, F, V;
- (e) V, V, V.

**Questão 15.** Seja  $B$  uma base ortonormal. Determine  $x$  de modo que os vetores  $u = (x, 1, 2x)_B$  e  $v = (2, 1, 3)_B$  sejam ortogonais.

- (a)  $x = \frac{1}{8}$ ;
- (b)  $x = -\frac{1}{8}$ ;
- (c)  $x = 0$ ;
- (d)  $x = \frac{1}{4}$ ;
- (e)  $x = -\frac{1}{4}$ .

**Questão 16.** *Seja  $B$  uma base ortonormal orientada positivamente, e considere a nova base  $C = (v_1, v_2, v_3)$  formada pelos vetores  $v_1 = (1, 0, 1)_B$ ,  $v_2 = (1, 1, 0)_B$  e  $v_3 = (0, 0, 1)_B$ . Seja  $(w_1, w_2, w_3)$  a base ortonormal obtida de  $C$  pelo método de Gram-Schmidt. Calcule o vetor  $w_2$ .*

- (a)  $w_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 2, 1)$ ;
- (b)  $w_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, -1)$ ;
- (c)  $w_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 2, -1)$ ;
- (d)  $w_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, -1)$ ;
- (e)  $w_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1)$ .

**Questão 17.** *Considere a seguinte relação  $R \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  em  $\mathbb{Z}$ :*

$$R = \{(n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : n + m \text{ é múltiplo de } 7\}.$$

*Qual das seguintes afirmações é verdadeira?*

- (a)  $R$  é uma relação simétrica;
- (b)  $R$  é uma relação reflexiva;
- (c)  $R$  é uma relação transitiva;
- (d)  $R$  é o conjunto vazio;
- (e)  $R$  é uma relação de equivalência.

**Questão 18.** *Num sistema de coordenadas  $(B, O)$ , determine as equações paramétricas da reta que passa pelo ponto  $(1, -1, 1)$  e paralela ao produto vetorial  $v \wedge w$ , onde  $v = (1, 1, 1)_B$  e  $w = (2, 1, -1)_B$ .*

- (a)  $x = 1 - 2\lambda, y = 1 + 3\lambda, z = -1 - \lambda, \lambda \in \mathbb{R}$ ;
- (b)  $x = 1 + 2\lambda, y = 1 + 3\lambda, z = 1 - \lambda, \lambda \in \mathbb{R}$ ;
- (c)  $x = 1 - \lambda, y = -1 - 3\lambda, z = 1 + \lambda, \lambda \in \mathbb{R}$ ;
- (d)  $x = 2 - \lambda, y = -1 - 3\lambda, z = 1 + \lambda, \lambda \in \mathbb{R}$ ;
- (e)  $x = 1 - 2\lambda, y = -1 + 3\lambda, z = 1 - \lambda, \lambda \in \mathbb{R}$ .

**Questão 19.** *Sejam  $v$  e  $w$  dois vetores ortogonais, com  $\|v\| = 2$  e  $\|w\| = 3$ . Calcule  $\|(v \wedge w) \wedge v\|$ .*

- (a) 3;
- (b) 6;
- (c) 12;
- (d) 0;
- (e) 2.

**Questão 20.** *Seja  $B = (v_1, v_2, v_3)$  uma base ortonormal de  $\mathbb{V}^3$ . Calcule o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores  $v_1 + 2v_2$ ,  $v_2 + 2v_3$  e  $v_3 + 2v_1$ .*

- (a) 1;
- (b) 4;
- (c) 9;
- (d) 8;
- (e)  $-1$ .

MAT 112 — Vetores e Geometria

Turma 2013122

Prof. Paolo Piccione

Prova 1 — **A**

08 de Maio de 2013

Nome: \_\_\_\_\_

Número USP: \_\_\_\_\_

Assinatura: \_\_\_\_\_

### Folha de Respostas

<b>1</b>	a	b	c	d	e
<b>2</b>	a	b	c	d	e
<b>3</b>	a	b	c	d	e
<b>4</b>	a	b	c	d	e
<b>5</b>	a	b	c	d	e
<b>6</b>	a	b	c	d	e
<b>7</b>	a	b	c	d	e
<b>8</b>	a	b	c	d	e
<b>9</b>	a	b	c	d	e
<b>10</b>	a	b	c	d	e
<b>11</b>	a	b	c	d	e
<b>12</b>	a	b	c	d	e
<b>13</b>	a	b	c	d	e
<b>14</b>	a	b	c	d	e
<b>15</b>	a	b	c	d	e
<b>16</b>	a	b	c	d	e
<b>17</b>	a	b	c	d	e
<b>18</b>	a	b	c	d	e
<b>19</b>	a	b	c	d	e
<b>20</b>	a	b	c	d	e

Deixe em branco.

Corretas	Erradas	Nota