MAT 0112

Vetores e Geometria

Lista 1 †

Instituto de Matemática e Estatística. Rua do Matão, 1010- Butantã. São Paulo-SP- CEP 05508-090, Brazil

Proposição. *A relação de equipolência é uma relação de equivalência, isto é, quaisquer que sejam os segmentos orientados* (A, B), (C, D) *e* (E, F) :
$(i)(A, B) \sim (A, B)$ *(propriedade reflexiva)*
$(ii)(A, B) \sim (C, D) \Rightarrow (C, D) \sim (A, B)$ *(propriedade simétrica)*
$(iii)(A, B) \sim (C, D)$ *e* $(C, D) \sim (E, F) \Rightarrow (A, B) \sim (E, F)$ *(propriedade transitiva)*

1. Exercícios

Questão 1.1. *Prove então que se* $[(A, B) \sim (P, Q)$ *e* $(C, D) \sim (P, Q)]$ *então* $(A, B) \sim (C, D)$.

Questão 1.2. *Seja* $X = \mathbb{Z}$ *o conjunto dos números inteiros. Para os conjuntos* $R \subset X \times X$ *aqui em baixo, determine quais são relações de equivalência, e nesse caso, descreva as classes de equivalência.*

(a) $R = \{(n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : n - m \geq 1\}$
(b) $R = \{(n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : n - m \text{ é múltiplo de } 7\}$
(c) $R = \{(n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : n + m \text{ é múltiplo de } 7\}$
(d) $R = \{(n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : n - 2m \text{ é múltiplo de } 5\}$
(e) $R = \{(n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : n \geq m\}$

Questão 1.3. $\overrightarrow{u} = -\overrightarrow{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$

Questão 1.4. *Verifique, justificando, se é verdadeira ou falsa cada afirmação:*
$(i)($ $)$ *Se* $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}$ *então* $||\overrightarrow{u}|| = ||\overrightarrow{v}||$
$(ii)($ $)$ *Se* $||\overrightarrow{u}|| = ||\overrightarrow{v}||$ *então* $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}$
$(iii)($ $)$ *Se* $\overrightarrow{u} // \overrightarrow{v}$ *então* $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}$
$(iv)($ $)$ *Se* $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}$ *então* $\overrightarrow{u} // \overrightarrow{v}$.
$(v)($ $)$ *Se* $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ *então* $AC \cap BD = \emptyset$

Questão 1.5. *Verifique, justificando, se é verdadeira ou falsa cada afirmação:*
$(i)($ $)$ $||\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}|| = ||\overrightarrow{u}|| + ||\overrightarrow{v}||$ *para quaisquer* $\overrightarrow{u}$ *e* $\overrightarrow{v}$.
$(ii)($ $)$ $||\overrightarrow{u} - \overrightarrow{w}|| = ||\overrightarrow{u}|| - ||\overrightarrow{w}||$ *para quaisquer* $\overrightarrow{u}$ *e* $\overrightarrow{w}$.

Questão 1.6. *Quais são a origem e a extremidade de um representante do vetor* $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{GH} - \overrightarrow{FA} - \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{FB}$?

Questão 1.7. *Determinar a origem* A *do segmento que representa o vetor* $\overrightarrow{u} = (2, 3, -1)$, *sendo sua extremidade o ponto* $B = (0, 4, 2)$.

Questão 1.8. *Mostre que, se* $\overrightarrow{v}$ *é um vetor não-nulo, então* $\overrightarrow{v}$ *e seu versor,* $\frac{\overrightarrow{v}}{||\overrightarrow{v}||}$, *são paralelos, de mesmo sentido, e que o versor de* $\overrightarrow{v}$ *tem norma 1.*

Questão 1.9. *O hexágono* $ABCDEF$ *é regular, de centro* O. *Prove que* $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = 6\overrightarrow{AO}$.

Questão 1.10. *Os pontos* A, B, C *E* D *são tais que* $A \neq B$, $C \neq D$, *e as retas* AB *e* CD *não são paralelas. Prove que* $\alpha\overrightarrow{AB} = \beta\overrightarrow{CD} \Rightarrow \alpha = \beta = 0$.

Questão 1.11. *Prove que* $A + \overrightarrow{u} = B + \overrightarrow{v} \Rightarrow \overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{v}$.

Questão 1.12. *Dados os pontos* A, B *e* C, *determine* X, *sabendo que* $(A + \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{CX} = C + \overrightarrow{CB}$.

Questão 1.13. *Prove que, se* $B = A + \overrightarrow{DC}$, *então* $B = C + \overrightarrow{DA}$.

Questão 1.14. *Seja* r *a razão em que o ponto* P *divide o segmento orientado não-nulo* (A, B). *Prove que* $r \neq -1$ *e que* $\overrightarrow{AP} = \frac{r}{1+r}\overrightarrow{AB}$.

Questão 1.15. *Sejam* A, B *e* C *pontos quaisquer,* $A \neq B$. *Prove que* X *pertence à reta* AB *se, e somente se, existem* α *e* β *tais que* $\overrightarrow{CX} = \alpha\overrightarrow{CA} + \beta\overrightarrow{CB}$ *e* $\alpha + \beta = 1$.

Questão 1.16. *O ponto* X *divide* (A, B) *na razão* α, Y *divide* (B, C) *na razão* β *e* Z *divide* (C, A) *na razão* γ. *Exprima* $\overrightarrow{CX}$, $\overrightarrow{AY}$ *e* $\overrightarrow{BZ}$ *em função de* $\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}, \alpha, \beta$ *e* γ.

Questão 1.17. *Dado o triângulo* ABC, *sejam* X *e* Y *os pontos tais que* $\overrightarrow{BX} = \alpha\overrightarrow{BC}$ *e* $\overrightarrow{AY} = \beta\overrightarrow{AC}$.*(Figura* 1).
Prove que $AX//BY$ *se, e somente se,* $\frac{(\alpha-1)}{(\beta-1)} = 1$

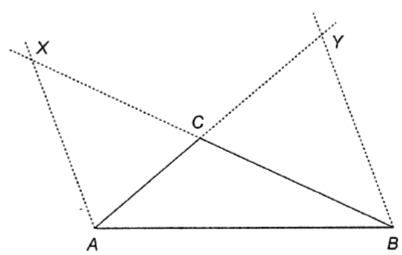

Figura 1