

MAT 112 — Vetores e Geometria

Prof. Paolo Piccione

28 de junho de 2013

Prova SUB — **A**

22 & 24

Nome: \_\_\_\_\_

Número USP: \_\_\_\_\_

Assinatura: \_\_\_\_\_

**Instruções**

- A duração da prova é de **uma hora e quarenta minutos**.
- Assinale as alternativas corretas na **folha de respostas** que está no final da prova. *É permitido deixar questões em branco.*
- Cada questão tem apenas **uma resposta correta**.
- O valor total da prova é de **10** pontos; cada questão correta vale  $\frac{1}{2}$  ponto (0.5) e *cada questão errada implica num desconto de  $\frac{1}{10}$  de ponto (0.1).*
- No final da prova, deve ser entregue apenas a folha de respostas (na última página)
- **Boa Prova!**

**Terminologia e Notações Utilizadas na Prova**

- A *distância focal* de uma elipse ou de uma hipérbole é a distância entre os dois focos.
- Para vetores  $v$  e  $w$ ,  $v \wedge w$  denota o produto vetorial de  $v$  e  $w$

***NÃO ESQUEÇA DE POR SEU NOME  
NA FOLHA DE RESPOSTAS!!!***

**Questão 1.** Determine a equação da esfera com centro no ponto  $C = (1, 2, -1)$  e tangente ao plano  $\pi : 2x - 2y + z = 0$ .

- (a)  $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 2z + 5 = 0$ ;
- (b)  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 2z + 5 = 0$ ;
- (c)  $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 2z + 6 = 0$ ;
- (d)  $x^2 + y^2 + z^2 - 10 = 0$ ;
- (e)  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 2z + 6 = 0$ .

**Questão 2.** Dada a esfera  $S : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 4z + 2 = 0$  e o plano  $\pi : 2x + 3y - z = 1$ . Podemos afirmar que

- (a) O ponto  $C = (3, 2, 1)$  pertence a esfera  $S$  e ao plano  $\pi$  ;
- (b) O ponto  $C = (1, 1, 0)$  pertence a esfera  $S$  e ao plano  $\pi$  ;
- (c) A esfera  $S$  tem raio 3.
- (d) O ponto  $C = (1, 1, 4)$  pertence a esfera  $S$  e ao plano  $\pi$  ;
- (e) O ponto  $C = (1, 3, 2)$  pertence a esfera  $S$  e ao plano  $\pi$  .

**Questão 3.** Determine os planos ortogonais ao vetor  $\vec{v} = (3, 2, -6)$  e tangentes à esfera  $S : x^2 + y^2 + z^2 - 2y = 0$ .

- (a)  $S$  não é uma esfera;
- (b)  $\pi_1 : 3x + 2y - 6z + 5 = 0$ ,  $\pi_2 : 3x + 2y - 6z - 9 = 0$ ;
- (c) não existe nenhum plano ortogonal a  $\vec{v}$  e tangente a  $S$ ;
- (d)  $\pi_1 : -3x - 2y + 6z + 5 = 0$ ,  $\pi_2 : -3x - 2y + 6z - 9 = 0$ ;
- (e)  $\pi_1 : 3x + 2y - 6z = 0$ ,  $\pi_2 : 3x + 2y - 6z + 5 = 0$ .

**Questão 4.** Determine a posição relativa da reta  $r$  e a esfera  $S$ :

$$r : \begin{cases} x = 1 + \lambda, \\ y = 2\lambda, \\ z = -1 + \lambda, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad S : x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 8 = 0.$$

- (a)  $r$  intercepta  $S$  em 2 pontos e passa pelo centro de  $S$ ;
- (b)  $r$  é tangente a  $S$ ;
- (c)  $r \cap S = \emptyset$ ;
- (d)  $S$  não é uma esfera;
- (e)  $r$  intercepta  $S$  e não passa pelo centro de  $S$ .

**Questão 5.** Dado o plano  $\pi$  de equações paramétricas:

$$x = 3 - 2\lambda + \mu, \quad y = 2 + \lambda - \mu, \quad z = -1 + \lambda + \mu,$$

determine a equação geral de  $\pi$ .

- (a)  $2x + 3y + z - 11 = 0$ ;
- (b)  $2x + 3y - 3z - 15 = 0$ ;
- (c)  $2x - 3y - z + 11 = 0$ ;
- (d)  $2x + 3y - z + 11 = 0$ ;
- (e)  $-2x + 3y - z - 11 = 0$ .

**Questão 6.** Determine a posição relativa entre a reta  $r$  e o plano  $\pi$ :

$$r : \begin{cases} x = 1 - \lambda, \\ y = 2\lambda, \\ z = -1 - \lambda, \end{cases}, \quad \pi : x + y + z = 1.$$

- (a)  $r$  intercepta  $\pi$  em um ponto apenas, mas não é ortogonal a  $\pi$ ;
- (b)  $r$  está contida em  $\pi$ ;
- (c)  $r$  é paralela a  $\pi$ , e  $r \cap \pi = \emptyset$ ;
- (d)  $r$  é ortogonal a  $\pi$ ;
- (e)  $r$  intercepta  $\pi$  exatamente em 2 pontos.

**Questão 7.** Determine a equação das esferas  $S_+$  e  $S_-$  com centro na reta  $r$ , com raio  $R = 2$ , e tangentes ao plano  $\pi$ , onde:

$$r : \begin{cases} x = \lambda, \\ y = \lambda, \\ z = 2\lambda, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad \pi : x + y + z = 0.$$

- (a)  $S_{\pm} : (x \pm \frac{\sqrt{3}}{2})^2 + (y \pm \sqrt{3})^2 + (z \pm \sqrt{3})^2 = 4$ ;
- (b)  $S_{\pm} : (x \pm \frac{1}{2})^2 + (y \pm \frac{1}{2})^2 + (z \pm 1)^2 = 4$ ;
- (c)  $S_{\pm} : (x \pm 1)^2 + (y \pm 1)^2 + (z \pm 2)^2 = 4$ ;
- (d)  $S_{\pm} : (x \pm \sqrt{3})^2 + (y \pm \frac{\sqrt{3}}{2})^2 + (z \pm \sqrt{3})^2 = 4$ ;
- (e)  $S_{\pm} : (x \pm \frac{\sqrt{3}}{2})^2 + (y \pm \frac{\sqrt{3}}{2})^2 + (z \pm \sqrt{3})^2 = 4$ .

**Questão 8.** Determine a equação das esferas  $S_+$  e  $S_-$  de raio  $R = 2\sqrt{3}$  que são tangentes ao plano  $\pi : -x + y + z = 1$  no ponto  $P = (0, 0, 1)$

- (a)  $S_{\pm} : (x \pm 2)^2 + (y \mp 2)^2 + (z \pm 3)^2 = 12;$   
 (b)  $S_{\pm} : (x \pm 3)^2 + (y \mp 2)^2 + (z \pm 2)^2 = 12;$   
 (c)  $S_+ : (x - 3)^2 + (y + 3)^2 + (z - 2)^2 = 12,$   
 $S_- : (x + 2)^2 + (y - 2)^2 + (z - 21)^2 = 12;$   
 (d)  $S_+ : (x - 3)^2 + (y + 3)^2 + (z - 2)^2 = 2\sqrt{3},$   
 $S_- : (x + 2)^2 + (y - 2)^2 + (z - 21)^2 = 2\sqrt{3};$   
 (e)  $S_+ : (x + 2)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 12,$   
 $S_- : (x - 2)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 12.$

**Questão 9.** Seja  $e_1, e_2, e_3$  uma base ortonormal orientada positivamente. Calcule  $((e_3 \wedge e_1) \wedge e_1) \wedge e_2$ .

- (a)  $e_2;$   
 (b)  $-e_3;$   
 (c)  $-e_1;$   
 (d)  $0;$   
 (e)  $e_1.$

**Questão 10.** Calcule a distância focal da elipse  $2x^2 + 3y^2 = 10$ .

- (a)  $2\sqrt{\frac{5}{3}};$   
 (b)  $\sqrt{10};$   
 (c)  $\frac{5}{3};$   
 (d)  $\sqrt{5};$   
 (e)  $\frac{10}{3}.$

**Questão 11.** A reta  $s$  passa pelo ponto  $P = (2, 2, 3)$  e é perpendicular à reta  $r : X = (1, 1, 1) + \lambda(2, 1, -3)$ . O ponto onde  $s$  intercepta  $r$  é:

- (a)  $(\frac{4}{7}, \frac{11}{14}, \frac{23}{14});$   
 (b)  $(\frac{8}{7}, \frac{11}{14}, \frac{23}{14});$   
 (c)  $(-\frac{8}{7}, \frac{11}{14}, \frac{23}{14});$   
 (d)  $(-\frac{4}{7}, \frac{11}{14}, \frac{23}{14});$   
 (e)  $(\frac{4}{7}, -\frac{11}{14}, -\frac{23}{14}).$

**Questão 12.** Calcule o perímetro do triângulo cujos vértices são os pontos médios dos lados do triângulo  $ABC$ , sendo  $A = (2, 1, 3)$ ,  $B = (4, -1, 1)$  e  $C = (0, 1, -1)$ .

- (a)  $\sqrt{12} + \sqrt{20} + \sqrt{24}$ ;
- (b) 1;
- (c)  $\sqrt{5} + \sqrt{3} + \sqrt{2}$ ;
- (d)  $\sqrt{6} + \sqrt{5} + \sqrt{3}$ ;
- (e) 16 .

**Questão 13.** Calcule a distância  $d$  entre o ponto  $P = (2, 3)$  e o ponto médio do segmento com extremos  $A = (6, 0)$  e  $B = (0, 4)$ .

- (a)  $d = \sqrt{2}$ ;
- (b)  $d = 2$ ;
- (c)  $d = \sqrt{3}$ ;
- (d)  $d = 0$ ;
- (e)  $d = 3$ .

**Questão 14.** Calcule a área do triângulo com vértices nos pontos  $A = (2, 4, 2)$ ,  $B = (4, 2, 0)$  e  $C = (0, 2, 4)$ .

- (a)  $2\sqrt{2}$ ;
- (b)  $\frac{1}{4}$ ;
- (c)  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ;
- (d) 4;
- (e)  $4\sqrt{2}$ .

**Questão 15.** Qual das equações abaixo descreve uma esfera de raio positivo?

- (a)  $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 10y - 4z + 45 = 0$ ;
- (b)  $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 10y - 4z + 41 = 0$ ;
- (c)  $x^2 + 2y^2 + z^2 - 8x - 10y - 4z + 44 = 0$ ;
- (d)  $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 10y - 4xz + 40 = 0$ ;
- (e)  $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 10y - 4z + 46 = 0$ .

**Questão 16.** Determine os focos da elipse  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ .

- (a)  $F_1 = (0, -2), F_2 = (0, 2)$ ;
- (b)  $F_1 = (0, -2), F_2 = (3, 0)$ ;
- (c)  $F_1 = (0, -3), F_2 = (0, 3)$ ;
- (d)  $F_1 = (-2, 0), F_2 = (2, 0)$ ;
- (e)  $F_1 = (-3, 0), F_2 = (3, 0)$ .

**Questão 17.** Determine o foco da parábola  $4x + 9y^2 = 0$ .

- (a)  $(-\frac{1}{4}, 0)$ ;
- (b)  $(0, -\frac{1}{9})$ ;
- (c)  $(0, -\frac{1}{4})$ ;
- (d)  $(-\frac{1}{9}, 0)$ ;
- (e)  $(\frac{1}{9}, -\frac{1}{4})$ .

**Questão 18.** Determine a posição relativa das esferas

$$S_1 : (x - 1)^2 + y^2 + (z + 1)^2 = 4, \quad e \quad S_2 : (x - 2)^2 + (y - 2)^2 + z^2 = 1.$$

- (a)  $S_1 \cap S_2$  é uma circunferência de raio  $r > 2$ ;
- (b)  $S_1 \cap S_2$  é uma circunferência de raio  $1 < r < 2$ ;
- (c)  $S_1 \cap S_2$  é uma circunferência de raio  $r < 1$ ;
- (d)  $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ ;
- (e)  $S_1$  e  $S_2$  são tangentes.

**Questão 19.** Determine  $m$  para que os planos  $\pi_1$  e  $\pi_2$  sejam ortogonais:

$$\pi_1 : mx + (m + 1)y + 2 = 0, \quad \pi_2 : mx + (m - 1)y + z = 0.$$

- (a)  $m = \pm\sqrt{3}$ ;
- (b)  $m = \pm 1$ ;
- (c)  $m = \pm\frac{1}{2}$ ;
- (d) não existe algum  $m$  que torne os planos  $\pi_1$  e  $\pi_2$  ortogonais;
- (e)  $m = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ .

**Questão 20.** *Determine o coeficiente  $\beta$  de forma que a elipse  $\frac{x^2}{4} + \beta y^2 = 1$  tenha um foco no ponto  $(0, -2)$ .*

(a)  $\beta = \frac{1}{\sqrt{8}}$ ;

(b)  $\beta = \frac{1}{\sqrt{13}}$ ;

(c)  $\beta = 8$ ;

(d)  $\beta = \frac{1}{13}$  ;

(e)  $\beta = \frac{1}{8}$ .

MAT 112 — Vetores e Geometria – Prof. Paolo Piccione

Turmas 22 & 24

Prova SUB — **A**

28 de junho de 2013

Nome: \_\_\_\_\_

Número USP: \_\_\_\_\_

Assinatura: \_\_\_\_\_

Turma:  22 ou  24

## Folha de Respostas

<b>1</b>	a	b	c	d	e
<b>2</b>	a	b	c	d	e
<b>3</b>	a	b	c	d	e
<b>4</b>	a	b	c	d	e
<b>5</b>	a	b	c	d	e
<b>6</b>	a	b	c	d	e
<b>7</b>	a	b	c	d	e
<b>8</b>	a	b	c	d	e
<b>9</b>	a	b	c	d	e
<b>10</b>	a	b	c	d	e
<b>11</b>	a	b	c	d	e
<b>12</b>	a	b	c	d	e
<b>13</b>	a	b	c	d	e
<b>14</b>	a	b	c	d	e
<b>15</b>	a	b	c	d	e
<b>16</b>	a	b	c	d	e
<b>17</b>	a	b	c	d	e
<b>18</b>	a	b	c	d	e
<b>19</b>	a	b	c	d	e
<b>20</b>	a	b	c	d	e

Deixe em branco.

Corretas	Erradas	Nota