MAT 105 – Vetores e Geometria Analítica

Prof. Paolo Piccione

Lista de Exercícios 2

... em construção ... (`última atualização: 04/06/2005`)

Fixemos um sistema de coordenadas ortonormal no espaço, ou seja, uma base ortonormal $E = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ de vetores e uma origem O do sistema de coordenadas. Em todos os exercícios abaixo, os vetores serão escritos em componentes nessa base, e os pontos do espaço serão dados em coordenadas nesse fixado sistema de coordenadas.

(1) Escreva as equações paramétricas da reta passante pelo ponto P_0 e tendo a direção do vetor $\mathbf{v}$ nos seguintes casos:
(a) $P_0 = (1, 2, 1)$, $\mathbf{v} = (2, 1, 0)_E$;
(b) $P_0 = (2, 2, 1)$, $\mathbf{v} = (1, 1, 1)_E$.
Qual das duas retas acima passa pela origem do sistema de coordenadas? As duas retas são coplanares?

(2) Seja r a reta passante por $P_0 = (1, 1, 1)$ e ortogonal ao plano que tem a direção dos vetores $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 1)_E$ e $\mathbf{v}_2 = (0, 1, 0)_E$. Qual é o ponto de r mais próximo a origem do sistema de coordenadas?

(3) São dados os pontos $A = (3, 6, -7)$, $B = (-5, 2, 3)$ e $C = (4, -7, -6)$.
(a) Escreva as equações vetorial e paramétrica da reta passante por A e B. O ponto $D = (3, 1, 4)$ pertence a essa reta?
(b) Verifique que os pontos A, B e C são os vértices de um triângulo.
(c) Escreva as equações paramétricas da mediana relativa ao vértice C do triângulo.
(d) Calcule a altura do triângulo relativa ao vértice B.

(4) Dados os pontos $A = (1, 2, 5)$ e $B = (0, 1, 0)$, seja r a reta passante por A e B. Determine o ponto P de r tal que o comprimento do segmento BP seja o triplo do comprimento do segmento AP.

(5) Seja r a reta passante por $P_0 = (1, 0, 1)$ com a direção do vetor $\mathbf{v} = (2, 1, -1)_E$, e seja $P_1 = (2, 3, 2)$. Determine o ponto $Q \in r$ de mínima distância de P_1.

(6) Determine a *posição relativa* das retas r_1 e r_2 dadas em baixo:

$$\text{(a)}\quad r_1 : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 - t \\ z = 3 - t \end{cases}, \quad r_2 : \begin{cases} x = 2 - 3s \\ y = 1 + s \\ z = -1 + 2s \end{cases} \quad t, s \in I\!R.$$

$$\text{(b)}\quad r_1 : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 + t \\ z = -1 + 3t \end{cases}, \quad r_2 : \begin{cases} x = 2 + 2s \\ y = 3 - s \\ z = -3s \end{cases} \quad t, s \in I\!R.$$

(c) $r_1 : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -\frac{1}{2} + t \\ z = -\frac{3}{2} + 3t \end{cases}$, $r_2 : \begin{cases} x = 1 - s \\ y = 3 - 3s \\ z = 2 - 2s \end{cases}$ $t, s \in I\!R$.

(7) Determine a equação cartesiana do plano que passa pelos pontos $A = (1, 2, 1)$, $B = (2, 0, 1)$ e $C = (1, 1, -1)$. Os pontos A, B, C e $D = (0, 1, 1)$ sãoi coplanares?

(8) Determine a equação do feixe de planos pela reta $r : \begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 1 + t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$ $t \in I\!R$.

(9) Determine a *posição relativa* dos planos Π_1 e Π_2 dados em baixo:

(a) $\Pi_1 :\ 2x - 3y + 4z - 1 = 0$, $\Pi_2 : -x + \frac{3}{2}y - 2z + 2 = 0$.

(b) $\Pi_1 :\ x - y + 2z = 0$, $\Pi_2 :\ x + y - z + 1 = 0$.

(c) $\Pi_1 :\ 2x - y + 2 = 0$, $\Pi_2 :\ y - z + 2 = 0$.

(10) Calcule o cosseno do ângulo entre os planos Π_1 e Π_2 dos itens (b) e (c) do Exercício 9.

(11) Calcule a distância entre o ponto $P_0 = (1, 2, 4)$ e o plano Π_1 nos itens (a), (b) e (c) do Exercício 9.

(12) Nos planos Π_2 nos itens (a), (b) e (c) do Exercício 9, determine o ponto de mínima distância de $P_1 = (-1, 1, 2)$.

(13) Determine a equação do plano que contem a reta r_2 no item (b) do exercício 6 e que passe pelo ponto $P_0 = (-1, -2, 3)$.

(14) Calcule o cosseno do ângulo entre a reta r_1 no item (a) do exercício 6 e o plano Π_2 no item (c) do exercício 9.

(15) Determine a equação do plano que contem a reta r_2 no item (b) do exercício 6 e que forme um ângulo de 45^o com a reta r_1 no item (a) do exercício 6.