MAT 105 – Vetores e Geometria Analítica

Prof. Paolo Piccione

Lista de Exercícios 1

(1) Seja $E = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ uma base de vetores do espaço; considere os seguintes vetores, dados em componententes nessa base:

$$\mathbf{v}_1 = (2,1,3)_E, \quad \mathbf{v}_2 = (1,3,2)_E, \quad \mathbf{v}_3 = (0,1,1)_E, \quad \mathbf{v}_4 = (1,1,0)_E, \quad \mathbf{v}_5 = (1,1,1)_E.$$

(a) Determine quais das seguintes triplas são linearmente independentes: $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$, $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4)$, $(\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5)$, $(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_5)$, $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5)$.

(b) Quais das triplas L.I. acima formam bases *com a mesma orientação* de E?

Vamos supor de agora em diante que E seja uma base *ortonormal*,

(c) Calcule o cosseno do ângulo entre os vetores $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$, entre $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$, entre $\mathbf{v}_3$ e $\mathbf{v}_4$, entre $\mathbf{v}_4$ e $\mathbf{v}_5$.

(d) Calcule o comprimento de $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_4$ e $\mathbf{v}_5$.

(e) Calule os produtos vetoriais: $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_3 \times \mathbf{v}_4$, $\mathbf{v}_4 \times \mathbf{v}_5$.

(f) Calcule os produtos escalares: $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_4$, $\mathbf{v}_4 \cdot \mathbf{v}_5$.

(g) Calcule os produtos triplos $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_4$, $\mathbf{v}_3 \times \mathbf{v}_4 \cdot \mathbf{v}_5$, $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_5$.

(2) Determine uma base ortonormal $E' = (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$ tal que $\mathbf{e}'_1$ seja um múltiplo de $\mathbf{v}_1$, tal que $\mathbf{e}'_2$ seja uma combinação linear de $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$, e tal que E' tenha a mesma orientação de E.

(3) Calcule a área dos triângulos com lados $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_3$ e $\mathbf{v}_4$, $\mathbf{v}_4$ e $\mathbf{v}_5$.

(4) Determine um vetor ortogonal a $\mathbf{v}_3$ que seja combinação linear de $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$.

(5) Sejam $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ dois vetores tais que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 2$, $\|\mathbf{u}\| = 3$ e $\|\mathbf{v}\| = 2$. Calcule $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$.

(6) Considere as seguintes bases: $F = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$, $G = (\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ e $H = (\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5)$. Calcule as matrizes de mudança de base de F para G, de G para H e de H para F. Dado o vetor $\mathbf{w} = (1,1,1)_F$, quais são as componentes de $\mathbf{w}$ nas bases G e H?

(7) Determine uma base *ortonormal* $F = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$ de vetores com as seguintes propriedades:

(a) $\mathbf{f}_1$ tem mesma direção e sentido de $\mathbf{v}_2$

(b) $\mathbf{f}_3$ é combinação linear de $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$

(c) F tem orientação negativa.

Quantas bases F do tipo acima existem? Justifique.

(8) Calcule a matriz M de mudança de base de E para F (do exercício 7). Verifique que M é uma *matriz ortogonal*, i.e., $M \cdot M^t = \mathrm{I}$, onde M^t é a matriz transposta de M e I é a matriz identidade 3×3.

(9) Determine todos os valores de λ tais que os vetores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{w} = (\lambda, \lambda + 1, \lambda + 2)$ sejam linearmente dependentes.

(10) Mostre com um exemplo que o produto vetorial é uma operação binária que *não* satisfaz a propriedade associativa. Use a identidade:

$$(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) \times \mathbf{a}_3 = -(\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_3)\,\mathbf{a}_1 + (\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_3)\,\mathbf{a}_2,$$

para provar que dados vetores $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ vale a *identidade de Jacobi*:

$$(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \times \mathbf{z} + (\mathbf{y} \times \mathbf{z}) \times \mathbf{x} + (\mathbf{z} \times \mathbf{x}) \times \mathbf{y} = 0.$$

(11) Mostre que para todo par de vetores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ valem as desigualdades:

$$|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\|, \quad \text{e} \quad \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\|.$$

(12) Calcule $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ sabendo que $\|\mathbf{a}\| = 1$, $\|\mathbf{b}\| = 2$, $\|\mathbf{c}\| = 3$, que os três vetores são dois a dois ortogonais, e que a base $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ tem orientação negativa.

(13) Calcule $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ sabendo que a medida em radianos do ângulo entre $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ é $\frac{\pi}{6}$, $\mathbf{c}$ é ortogonal a $\mathbf{a}$ e a $\mathbf{b}$, $\|\mathbf{a}\| = \|\mathbf{b}\| = 1$ e $\|\mathbf{c}\| = 4$, e sabendo que a base $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ tem orientação positiva.