MAT 104 — Cálculo 1

Prof. Paolo Piccione

Prova REC — 28.07.2010

Nome: ____

Número USP: ____

Assinatura: ____

Instruções

- A duração da prova é de **uma hora e quarenta minutos**.
- Assinale as alternativas corretas na **folha de respostas** que está no final da prova. *É permitido deixar questões em branco.*
- A prova consiste em 15 questões. Cada questão tem apenas **uma resposta correta**.
- O valor total da prova é de **10.5** pontos; cada questão correta vale **0.7** pontos e *cada questão errada implica num desconto de* **0.1** *ponto.*
- A prova SUB é *semi-aberta*, ou seja, caso o aluno entregue a prova para correção, a nota entrará necessariamente no cálculo da nota final, substituindo a menor entre a nota da P1 e da P2.
- **Boa Prova!**

Notações e Terminologia Utilizada na Prova

- $\mathbb{R}$ denota o conjunto dos números reais.
- A derivada de uma função f é denotada com f'.
  A derivada segunda é f''.
- Dadas funções f e g, a composta é indicada por $f \circ g$.
- log denota a função logaritmo em base e (logaritmo natural). Para $a > 0$, $a \neq 1$, $\log_a x$ é o logaritmo em base a.
- Um *extremo local* de uma função f é um ponto de mínimo ou de máximo local da f.
- Um *ponto de inflexão* de uma função f é um ponto onde muda a concavidade do gráfico de f.

NÃO ESQUEÇA DE POR SEU NOME
NA FOLHA DE RESPOSTAS!!!

$\boxed{\mathbf{A}}$

Questão 1. Determine o único ponto crítico x_0 da função $f(x) = \dfrac{3 \log x}{x}$.

(a) $x_0 = 1$;
(b) $x_0 = e$;
(c) $x_0 = 0$;
(d) $x_0 = -1$;
(e) $x_0 = \frac{1}{e}$.

Questão 2. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(a) Se $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ é derivável, $f(0) = 0$ e $f(2) = 2$, então existe $\xi \in]0, 2[$ tal que $f'(\xi) = 1$;
(b) Se $f'(x_0) = 0$, então x_0 é um máximo ou um mínimo local da f;
(c) Se $f''(x_0) = 0$, então x_0 é um ponto de inflexão;
(d) Se $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ é derivável, $f(0) = 0$ e $f(1) = 2$, então existe $\xi \in]0, 1[$ tal que $f'(\xi) = 1$;
(e) Se $x_0 \in [a, b]$ é um ponto de máximo da f em $[a, b]$, então $f'(x_0) = 0$.

Questão 3. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(a) se $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ e $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, então $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = 0$;
(b) se $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = 1$, então $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ e $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$;
(c) se a_n é uma sequência limitada, e $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, então $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = 0$;
(d) se $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ e $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, então $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = +\infty$;
(e) se a_n é limitada, então existe o limite $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Questão 4. Sejam $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma família de *afirmações*, cada uma das quais pode ser ou verdadeira ou falsa. Suponha que:

- $\mathcal{A}_5$ é verdadeira;
- se $\mathcal{A}_n$ é verdadeira, então $\mathcal{A}_{n+2}$ também é verdadeira.

O que podemos deduzir?

(a) $\mathcal{A}_n$ é falsa para todo $n < 5$;
(b) $\mathcal{A}_{2n+1}$ é verdadeira para todo $n \geq 2$;
(c) $\mathcal{A}_{2n}$ é verdadeira para todo $n > 2$;
(d) $\mathcal{A}_{n+2}$ é verdadeira para todo $n \geq 5$;
(e) $\mathcal{A}_n$ é falsa para todo $n > 5$.

Questão 5. Determine o conjunto das soluções da desigualdade

$$\log_{1/2}(x^2 - 3x + 5/2) < 1.$$

(a) $[1, 2]$;
(b) $]2, +\infty[$;
(c) $]1, +\infty[$;
(d) $]-\infty, 1[\bigcup]2, +\infty[$;
(e) $]-\infty, 2[$.

Questão 6. Quantos pontos de inflexão tem o gráfico da função f dada?

$$f(x) = 2e^{x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(a) nenhum;
(b) dois;
(c) três;
(d) um;
(e) quatro.

Questão 7. Qual das seguintes retas é uma assíntota para a função

$$f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 1}{x + 2}$$

quando $x \to +\infty$?

(a) $y = 2x - 14$;
(b) $y = 4x - 6$;
(c) $y = 2x - \frac{3}{2}$;
(d) $y = 2x - 7$;
(e) $y = 2x + 4$.

Questão 8. Em qual dos intervalos dados a função $f(x) = 3\sqrt{x} + \dfrac{3}{\sqrt{x}}$ é crescente?

(a) $]0, 1[$;
(b) $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$;
(c) $]2, +\infty[$;
(d) $]1, +\infty[$;
(e) $\left]0, \sqrt{2}\right[$.

Questão 9. Calcule o limite $L = \lim_{n\to\infty} \dfrac{(2n)!}{n^4}$.

(a) $L = \dfrac{\infty!}{\infty^3}$;

(b) $L = 1$;

(c) $L = \dfrac{n^2}{(n-1)!}$;

(d) $L = +\infty$;

(e) $L = 0$.

Questão 10. Seja P o ponto do plano cujas coordenadas são $(1, -1)$. Determine o ponto Q pertencente ao gráfico da função $f(x) = \dfrac{1}{x}$, com $x > 0$, com a propriedade que a reta por P e Q seja tangente ao gráfico da f no ponto Q.

(a) $Q = \left(\sqrt{2}-1, \dfrac{1}{\sqrt{2}-1}\right)$;

(b) $Q = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}, \sqrt{2}-1\right)$;

(c) $Q = \left(\sqrt{2}-1, \dfrac{1}{\sqrt{2}+1}\right)$;

(d) $Q = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}, \sqrt{2}+1\right)$;

(e) $Q = \left(\sqrt{2}+1, \dfrac{1}{\sqrt{2}+1}\right)$.

Questão 11. Determine e classifique os extremos locais da função

$$f(x) = e^{x^2}(2-x).$$

(a) $x = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$ é um mínimo local, $x = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$ é um máximo local;

(b) $x = 0$ é um mínimo local e $x = 2$ é um máximo local;

(c) $x = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$ é um máximo local, $x = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$ é um mínimo local;

(d) $x = 0$ é um máximo local e $x = 2$ é um mínimo local;

(e) f não possui extremos locais.

Questão 12. Calcule o limite $L = \lim_{x\to 0} \dfrac{3^x - 1}{\tan(2x)}$.

(a) $L = \log(\sqrt{3})$;
(b) $L = +\infty$;
(c) $L = \dfrac{3}{2}$;
(d) $L = \dfrac{3^0 - 1}{\sin 0}$;
(e) $L = \log 3$.

Questão 13. Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções deriváveis, tais que:

$$f(0) = 1,\ g(2) = 2,\ f'(0) = 4,\ g'(0) = -1,\ f(2) = 3,$$
$$f'(2) = -2,\ g(3) = -2,\ g'(3) = 4.$$

Calcule $(g \circ f)'(2)$.

(a) 12;
(b) 6;
(c) -4;
(d) -8;
(e) 8.

Questão 14. Calcule a derivada segunda da função $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$.

(a) $f''(x) = \dfrac{e^x\left(x^2 - 4x + 2\right) - 4x}{x^4}$;
(b) $f''(x) = \dfrac{e^x\left(x^3 - x + 2\right) - 2x}{x^4}$;
(c) $f''(x) = \dfrac{e^x\left(x^3 - 4x + 2\right) - 2}{x^3}$;
(d) $f''(x) = \dfrac{e^x\left(x^3 - 2x + 1\right) - x}{x^4}$;
(e) $f''(x) = \dfrac{e^x\left(x^2 - 2x + 2\right) - 2}{x^3}$.

Questão 15. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável, e com inversa f^{-1}. Sabendo que $f(0) = 1$, $f(1) = 3$, $f(3) = 4$, $f'(0) = 2$, $f'(1) = 1$, $f'(3) = 4$, calcule $(f^{-1})'(3)$.

(a) $\frac{1}{2}$;

(b) 1;

(c) $\frac{1}{4}$;

(d) $-\frac{1}{2}$;

(e) $-\frac{1}{4}$.

MAT 104 — Cálculo 1
Prof. Paolo Piccione

Prova REC

28 de Julho de 2010

Nome: ____

Número USP: ______________________________________

Assinatura: _______________________________________

Turma: $\boxed{\textbf{FÍSICA}}$ $\boxed{\textbf{QUÍMICA}}$

Folha de Respostas $\boxed{\textbf{A}}$

1	a	b	c	d	e
2	a	b	c	d	e
3	a	b	c	d	e
4	a	b	c	d	e
5	a	b	c	d	e
6	a	b	c	d	e
7	a	b	c	d	e
8	a	b	c	d	e
9	a	b	c	d	e
10	a	b	c	d	e
11	a	b	c	d	e
12	a	b	c	d	e
13	a	b	c	d	e
14	a	b	c	d	e
15	a	b	c	d	e

Deixe em branco.

Corretas	**Erradas**	**Nota**