

MAT 104 — Cálculo 1

Prof. Paolo Piccione

Prova 2

09 de Junho de 2010

Nome: _____

Número USP: _____

Assinatura: _____

Instruções

- A duração da prova é de **uma hora e quarenta minutos**.
- Assinale as alternativas corretas na **folha de respostas** que está no final da prova. *É permitido deixar questões em branco.*
- Cada questão tem apenas **uma resposta correta**.
- O valor total da prova é de **10 pontos**; cada questão correta vale $\frac{1}{2}$ ponto (0.5) e *cada questão errada implica num desconto de $\frac{1}{10}$ de ponto (0.10)*.
- **Boa Prova!**

Notações Utilizadas na Prova

- \mathbb{R} denota o conjunto dos números reais, e \mathbb{N} denota o conjunto dos números inteiros não negativos.
- Dadas funções f e g , a composta é indicada por $f \circ g$.
- \log denota a função logaritmo em base e (logaritmo natural). Para $a > 0$, $a \neq 1$, $\log_a x$ é o logaritmo em base a .
- A derivada de uma função f é denotada com f' . A derivada segunda com f'' .
- Uma função $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dita *crescente* se $f(x_1) \leq f(x_2)$ sempre que $x_1 \leq x_2$, $x_1, x_2 \in A$. A função é *decrescente* se $f(x_1) \geq f(x_2)$ quando $x_1 \leq x_2$, $x_1, x_2 \in A$.

**NÃO ESQUEÇA DE POR SEU NOME
NA FOLHA DE RESPOSTAS!!!**

Qui-E

Questão 1. Calcule a derivada segunda da função $f(x) = x^{2x}$.

- (a) $f''(x) = 2x^{2x-1} + x^{2x}(2\log(x) + 2)^2$;
- (b) $f''(x) = x^{2x}(2\log(x) + 2)^2$;
- (c) $f''(x) = x^{2x-1} + 2x^{2x}(2\log(x) + 2)^2$;
- (d) $f''(x) = 2x(2x - 1)x^{2x-2}$;
- (e) $f''(x) = 4x^{2x}$.

Questão 2. Calcule o limite $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{n!}$.

- (a) $L = 1$;
- (b) $L = 0$;
- (c) $L = \frac{\infty^3}{\infty!}$;
- (d) $L = +\infty$;
- (e) $L = \frac{n^2}{(n-1)!}$.

Questão 3. Sejam $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções deriváveis, tais que:

$$f(0) = 1, g(2) = 2, f'(0) = 4, g'(0) = -1, f(2) = 3, \\ f'(2) = -2, g(3) = -2, g'(3) = 4.$$

Calcule $(g \circ f)'(2)$.

- (a) -4 ;
- (b) -8 ;
- (c) 12 ;
- (d) 6 ;
- (e) 8 .

Questão 4. Seja $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = \log(1+x)$. Qual é o domínio de $f \circ g$?

- (a) $[0, +\infty[$;
- (b) $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$;
- (c) $]0, \sqrt{x}[$;
- (d) $] -1, +\infty[$;
- (e) $]0, 1[$.

Questão 5. Sejam $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funções deriváveis, com $h \neq 0$. Calcule a derivada da função:

$$\ell(x) = \frac{f(x) \cdot g(x)}{h(x)}.$$

(a) $\ell'(x) = \frac{f'(x) g'(x) h(x) - f(x) g(x) h'(x)}{h(x)^2};$

(b) $\ell'(x) = \frac{f'(x) g'(x)}{h'(x)};$

(c) $\ell'(x) = \frac{f'(x) g(x) h(x) + f(x) g'(x) h(x) - f(x) g(x) h'(x)}{h(x)^2};$

(d) $\ell'(x) = \frac{f'(x) g(x) h(x) + f(x) g'(x) h(x) - f(x) g(x) h'(x)}{h(x)};$

(e) $\ell'(x) = \frac{f'(x) g(x) h(x) + f(x) g'(x) h(x) + f(x) g(x) h'(x)}{h(x)^2}.$

Questão 6. Em qual intervalo a função $f(x) = e^{-x^2}$ é decrescente?

(a) $[0, +\infty[;$

(b) $[-\log 2, 0];$

(c) $[0, \log 2];$

(d) $] -\infty, 0];$

(e) $[-\log 2, \log 2].$

Questão 7. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(a) Se f é derivável, então f é crescente;

(b) Se f é derivável em x_0 , então f é contínua em x_0 ;

(c) Se f é contínua em x_0 , então f é crescente;

(d) Se f é contínua em x_0 , então f é derivável em x_0 ;

(e) Se f é contínua em x_0 , então f não é derivável em x_0 .

Questão 8. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável, e com inversa f^{-1} . Sabendo que $f(0) = 1$, $f(1) = 3$, $f(3) = 4$, $f'(0) = 2$, $f'(1) = 1$, $f'(3) = 4$, calcule $(f^{-1})'(3)$.

- (a) $-\frac{1}{2}$;
- (b) $\frac{1}{4}$;
- (c) 1;
- (d) $-\frac{1}{4}$;
- (e) $\frac{1}{2}$.

Questão 9. Determine por quais x em seu domínio, a função $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 1}$ tem derivada segunda positiva.

- (a) $]1, +\infty[$;
- (b) $] -\infty, 1[$;
- (c) $] -1, 1[$;
- (d) $] -1, +\infty[$;
- (e) $] -\infty, -1[$.

Questão 10. Seja P o ponto do plano cujas coordenadas são $(1, -1)$. Determine o ponto Q pertencente ao gráfico da função $f(x) = \frac{1}{x}$, com $x > 0$, com a propriedade que a reta por P e Q seja tangente ao gráfico da f no ponto Q .

- (a) $Q = \left(\frac{1}{\sqrt{2} - 1}, \sqrt{2} - 1 \right)$;
- (b) $Q = \left(\sqrt{2} - 1, \frac{1}{\sqrt{2} - 1} \right)$;
- (c) $Q = \left(\sqrt{2} - 1, \frac{1}{\sqrt{2} + 1} \right)$;
- (d) $Q = \left(\sqrt{2} + 1, \frac{1}{\sqrt{2} + 1} \right)$;
- (e) $Q = \left(\frac{1}{\sqrt{2} + 1}, \sqrt{2} + 1 \right)$.

Questão 11. Em qual ponto a reta tangente ao gráfico da parábola $y = 2 - x^2$ é paralela à reta $y - 3x - 4 = 0$?

- (a) $(\sqrt{3}, -1)$;
- (b) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{4}\right)$;
- (c) $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right)$;
- (d) $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right)$;
- (e) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{4}\right)$.

Questão 12. Determine o único ponto crítico x_0 da função $f(x) = \frac{\log x}{x}$.

- (a) $x_0 = e$;
- (b) $x_0 = \frac{1}{e}$;
- (c) $x_0 = 1$;
- (d) $x_0 = -1$;
- (e) $x_0 = 0$.

Questão 13. Considere a função $f(x) = x^5 - 3x^3 + 2x - 1$ no intervalo $[0, 1]$. O Teorema de Lagrange garante que:

- (a) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 8$;
- (b) f tem 5 pontos críticos em $]0, 1[$;
- (c) existe $x_0 \in]0, 1[$ tal que $5x_0^4 - 9x_0^2 + 2 = 0$;
- (d) f é decrescente em $[0, 1]$;
- (e) existe $x_0 \in]0, 1[$ tal que $5x_0^4 - 9x_0^2 + 2 = -1$.

Questão 14. Seja $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável. Qual das seguintes afirmações é necessariamente verdadeira?

- (a) f não admite máximo e mínimo em $]a, b[$;
- (b) Se $f' \geq 0$, então f é crescente;
- (c) f admite máximo e mínimo em $]a, b[$;
- (d) existe $x_0 \in]a, b[$ tal que $f'(x_0) = 0$;
- (e) $f(x) = \frac{1}{(x-a)(x-b)}$.

Questão 15. Uma pedra é derrubada de um penhasco de modo que sua altura $s(t)$ em metros acima do solo após t segundos é dada por

$$s(t) = 60 - 5t^2.$$

Seja v_f a velocidade final com que a pedra atinge o solo. Determine a que altura a pedra atinge velocidade $\frac{1}{2}v_f$.

- (a) 45 metros;
- (b) $10 + \sqrt{3}$ metros;
- (c) 60 metros;
- (d) 15 metros;
- (e) $\sqrt{3}$ metros.

Questão 16. Calcule o limite $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 1}{\sin(2x)}$.

- (a) $L = \log 3$;
- (b) $L = \log(\sqrt{3})$;
- (c) $L = \frac{3^0 - 1}{\sin 0}$;
- (d) $L = +\infty$;
- (e) $L = \frac{3}{2}$.

Questão 17. Seja f uma função derivável em x_0 , com $f(x_0) = 0$, e seja $g(x) = f(x)^2$. Qual é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da g no ponto $(x_0, 0)$?

- (a) $g'(0)$;
- (b) $\sqrt{g'(x_0)}$;
- (c) $f'(x_0)^2$;
- (d) 0;
- (e) $f'(x_0)$.

Questão 18. Determine o conjunto das soluções da desigualdade

$$\log_{1/2}(x^2 - 3x + 5/2) \geq 1.$$

- (a) $[1, 2]$;
- (b) $]2, +\infty[$;
- (c) $] -\infty, 1[\cup]2, +\infty[$;
- (d) $]1, +\infty[$;
- (e) $] -\infty, 2[$.

Questão 19. Sejam $(\mathcal{A}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma família de *afirmações*, cada uma das quais pode ser ou verdadeira ou falsa. Suponha que:

- \mathcal{A}_5 é verdadeira;
- se \mathcal{A}_n é verdadeira, então \mathcal{A}_{n+2} também é verdadeira.

O que podemos deduzir?

- (a) \mathcal{A}_{2n+1} é verdadeira para todo $n \geq 2$;
- (b) \mathcal{A}_n é falsa para todo $n > 5$;
- (c) \mathcal{A}_{2n} é verdadeira para todo $n > 2$;
- (d) \mathcal{A}_n é falsa para todo $n < 5$;
- (e) \mathcal{A}_{n+2} é verdadeira para todo $n \geq 5$.

Questão 20. Que letra do alfabeto grego é: ξ ?

- (a) “epsilon” maiúsculo;
- (b) “mi” minúsculo;
- (c) “xi” minúsculo;
- (d) “eta” minúsculo;
- (e) “delta” maiúsculo.

MAT 104 — Cálculo 1
Prof. Paolo Piccione

Prova 2
09 de Junho de 2010

Nome: _____

Número USP: _____

Assinatura: _____

Folha de Respostas **Qui-E**

1	a	b	c	d	e
2	a	b	c	d	e
3	a	b	c	d	e
4	a	b	c	d	e
5	a	b	c	d	e
6	a	b	c	d	e
7	a	b	c	d	e
8	a	b	c	d	e
9	a	b	c	d	e
10	a	b	c	d	e
11	a	b	c	d	e
12	a	b	c	d	e
13	a	b	c	d	e
14	a	b	c	d	e
15	a	b	c	d	e
16	a	b	c	d	e
17	a	b	c	d	e
18	a	b	c	d	e
19	a	b	c	d	e
20	a	b	c	d	e