MAT 104 — Cálculo 1

Prof. Paolo Piccione

Prova 2

09 de Junho de 2010

Nome: ____

Número USP: ____

Assinatura: ____

Instruções

- A duração da prova é de **uma hora e quarenta minutos**.
- Assinale as alternativas corretas na **folha de respostas** que está no final da prova. *É permitido deixar questões em branco.*
- Cada questão tem apenas **uma resposta correta**.
- O valor total da prova é de **10** pontos; cada questão correta vale $\mathbf{\frac{1}{2}}$ ponto (0.5) e *cada questão errada implica num desconto de* $\mathbf{\frac{1}{10}}$ *de ponto* (0.10).
- **Boa Prova!**

Notações Utilizadas na Prova

- $\mathbb{R}$ denota o conjunto dos números reais, e $\mathbb{N}$ denota o conjunto dos números inteiros não negativos.
- Dadas funções f e g, a composta é indicada por $f \circ g$.
- log denota a função logaritmo em base e (logaritmo natural). Para $a > 0$, $a \neq 1$, $\log_a x$ é o logaritmo em base a.
- A derivada de uma função f é denotada com f'. A derivada segunda com f''.
- Uma função $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dita *crescente* se $f(x_1) \leq f(x_2)$ sempre que $x_1 \leq x_2$, $x_1, x_2 \in A$. A função é *descrescente* se $f(x_1) \geq f(x_2)$ quando $x_1 \leq x_2$, $x_1, x_2 \in A$.

NÃO ESQUEÇA DE POR SEU NOME NA FOLHA DE RESPOSTAS!!!

$\boxed{\textbf{Qui-A}}$

Questão 1. Calcule o limite $L = \lim_{x \to 0} \dfrac{3^x - 1}{\sin(2x)}$.

(a) $L = \log 3$;
(b) $L = +\infty$;
(c) $L = \dfrac{3^0 - 1}{\sin 0}$;
(d) $L = \dfrac{3}{2}$;
(e) $L = \log(\sqrt{3})$.

Questão 2. Seja P o ponto do plano cujas coordenadas são $(1, -1)$. Determine o ponto Q pertencente ao gráfico da função $f(x) = \dfrac{1}{x}$, com $x > 0$, com a propriedade que a reta por P e Q seja tangente ao gráfico da f no ponto Q.

(a) $Q = \left(\sqrt{2} + 1, \dfrac{1}{\sqrt{2} + 1}\right)$;
(b) $Q = \left(\sqrt{2} - 1, \dfrac{1}{\sqrt{2} - 1}\right)$;
(c) $Q = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2} - 1}, \sqrt{2} - 1\right)$;
(d) $Q = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2} + 1}, \sqrt{2} + 1\right)$;
(e) $Q = \left(\sqrt{2} - 1, \dfrac{1}{\sqrt{2} + 1}\right)$.

Questão 3. Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções deriváveis, tais que:

$$f(0) = 1,\ g(2) = 2,\ f'(0) = 4,\ g'(0) = -1,\ f(2) = 3,$$
$$f'(2) = -2,\ g(3) = -2,\ g'(3) = 4.$$

Calcule $(g \circ f)'(2)$.

(a) 12;
(b) 6;
(c) -4;
(d) -8;
(e) 8.

Questão 4. Sejam $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma família de *afirmações*, cada uma das quais pode ser ou verdadeira ou falsa. Suponha que:

- $\mathcal{A}_5$ é verdadeira;
- se $\mathcal{A}_n$ é verdadeira, então $\mathcal{A}_{n+2}$ também é verdadeira.

O que podemos deduzir?

(a) $\mathcal{A}_{n+2}$ é verdadeira para todo $n \geq 5$;
(b) $\mathcal{A}_{2n+1}$ é verdadeira para todo $n \geq 2$;
(c) $\mathcal{A}_n$ é falsa para todo $n > 5$;
(d) $\mathcal{A}_n$ é falsa para todo $n < 5$;
(e) $\mathcal{A}_{2n}$ é verdadeira para todo $n > 2$.

Questão 5. Em qual ponto a reta tangente ao gráfico da parábola $y = 2-x^2$ é paralela à reta $y - 3x - 4 = 0$?

(a) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{4}\right)$;
(b) $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right)$;
(c) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{4}\right)$;
(d) $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right)$;
(e) $(\sqrt{3}, -1)$.

Questão 6. Uma pedra é derrubada de um penhasco de modo que sua altura $s(t)$ em metros acima do solo após t segundos é dada por

$$s(t) = 60 - 5t^2.$$

Seja v_f a velocidade final com que a pedra atinge o solo. Determine a que altura a pedra atinge velocidade $\frac{1}{2}v_f$.

(a) 60 metros;
(b) $\sqrt{3}$ metros;
(c) 15 metros;
(d) 45 metros;
(e) $10 + \sqrt{3}$ metros.

Questão 7. Determine o único ponto crítico x_0 da função $f(x) = \dfrac{\log x}{x}$.

(a) $x_0 = 0$;
(b) $x_0 = e$;
(c) $x_0 = \frac{1}{e}$;
(d) $x_0 = -1$;
(e) $x_0 = 1$.

Questão 8. Em qual intervalo a função $f(x) = e^{-x^2}$ é decrescente?

(a) $[-\log 2, \log 2]$;
(b) $[0, +\infty[$;
(c) $[-\log 2, 0]$;
(d) $[0, \log 2]$;
(e) $]-\infty, 0]$.

Questão 9. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável, e com inversa f^{-1}. Sabendo que $f(0) = 1$, $f(1) = 3$, $f(3) = 4$, $f'(0) = 2$, $f'(1) = 1$, $f'(3) = 4$, calcule $(f^{-1})'(3)$.

(a) 1;
(b) $\dfrac{1}{4}$;
(c) $-\dfrac{1}{2}$;
(d) $\dfrac{1}{2}$;
(e) $-\dfrac{1}{4}$.

Questão 10. Seja $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ uma função derivável. Qual das seguintes afirmações é necessariamente verdadeira?

(a) existe $x_0 \in]a, b[$ tal que $f'(x_0) = 0$;
(b) f admite máximo e mínimo em $]a, b[$;
(c) f não admite máximo e mínimo em $]a, b[$;
(d) Se $f' \geq 0$, então f é crescente;
(e) $f(x) = \dfrac{1}{(x-a)(x-b)}$.

Questão 11. Sejam $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções deriváveis, com $h \neq 0$. Calcule a derivada da função:

$$\ell(x) = \frac{f(x) \cdot g(x)}{h(x)}.$$

(a) $\ell'(x) = \dfrac{f'(x)\, g'(x)\, h(x) - f(x)\, g(x)\, h'(x)}{h(x)^2}$;

(b) $\ell'(x) = \dfrac{f'(x)\, g'(x)}{h'(x)}$;

(c) $\ell'(x) = \dfrac{f'(x)\, g(x)\, h(x) + f(x)\, g'(x)\, h(x) - f(x)\, g(x)\, h'(x)}{h(x)^2}$;

(d) $\ell'(x) = \dfrac{f'(x)\, g(x)\, h(x) + f(x)\, g'(x)\, h(x) + f(x)\, g(x)\, h'(x)}{h(x)^2}$;

(e) $\ell'(x) = \dfrac{f'(x)\, g(x)\, h(x) + f(x)\, g'(x)\, h(x) - f(x)\, g(x)\, h'(x)}{h(x)}$.

Questão 12. Seja f uma função derivável em x_0, com $f(x_0) = 0$, e seja $g(x) = f(x)^2$. Qual é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da g no ponto $(x_0, 0)$?

(a) $f'(x_0)$;

(b) $g'(0)$;

(c) $\sqrt{g'(x_0)}$;

(d) $f'(x_0)^2$;

(e) 0.

Questão 13. Calcule a derivada segunda da função $f(x) = x^{2x}$.

(a) $f''(x) = x^{2x}\big(2\log(x) + 2\big)^2$;

(b) $f''(x) = x^{2x-1} + 2x^{2x}\big(2\log(x) + 2\big)^2$;

(c) $f''(x) = 4x^{2x}$;

(d) $f''(x) = 2x(2x-1)x^{2x-2}$;

(e) $f''(x) = 2x^{2x-1} + x^{2x}\big(2\log(x) + 2\big)^2$.

Questão 14. Determine por quais x em seu domínio, a função $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 1}$ tem derivada segunda positiva.

(a) $]-\infty, 1[$;
(b) $]-\infty, -1[$;
(c) $]1, +\infty[$;
(d) $]-1, +\infty[$;
(e) $]-1, 1[$.

Questão 15. Que letra do alfabeto grego é: ξ?

(a) "epsilon" maiúsculo;
(b) "mi" minúsculo;
(c) "xi" minúsculo;
(d) "delta" maiúsculo;
(e) "eta" minúsculo.

Questão 16. Calcule o limite $L = \lim_{n\to\infty} \dfrac{n^3}{n!}$.

(a) $L = \dfrac{\infty^3}{\infty!}$;
(b) $L = \dfrac{n^2}{(n-1)!}$;
(c) $L = 1$;
(d) $L = 0$;
(e) $L = +\infty$.

Questão 17. Seja $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = \log(1 + x)$. Qual é o domínio de $f \circ g$?

(a) $]0, 1[$;
(b) $]-1, +\infty[$;
(c) $[0, +\infty[$;
(d) $]0, \sqrt{x}[$;
(e) $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Questão 18. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(a) Se f é contínua em x_0, então f é derivável em x_0;
(b) Se f é contínua em x_0, então f é crescente;
(c) Se f é derivável em x_0, então f é contínua em x_0;
(d) Se f é derivável, então f é crescente;
(e) Se f é contínua em x_0, então f não é derivável em x_0.

Questão 19. Considere a função $f(x) = x^5 - 3x^3 + 2x - 1$ no intervalo $[0, 1]$. O Teorema de Lagrange garante que:

(a) f tem 5 pontos críticos em $]0, 1[$;
(b) existe $x_0 \in]0, 1[$ tal que $5x_0^4 - 9x_0^2 + 2 = 0$;
(c) existe $x_0 \in]0, 1[$ tal que $5x_0^4 - 9x_0^2 + 2 = -1$;
(d) $\lim_{x \to x_0} f(x) = 8$;
(e) f é decrescente em $[0, 1]$.

Questão 20. Determine o conjunto das soluções da desigualdade

$$\log_{1/2}(x^2 - 3x + 5/2) \geq 1.$$

(a) $]1, +\infty[$;
(b) $]-\infty, 2[$;
(c) $]2, +\infty[$;
(d) $]-\infty, 1[\bigcup]2, +\infty[$;
(e) $[1, 2]$.

MAT 104 — Cálculo 1
Prof. Paolo Piccione

Prova 2
09 de Junho de 2010

Nome: ____
Número USP: ____________________________________
Assinatura: _____________________________________

Folha de Respostas Qui-A

1	a	b	c	d	e
2	a	b	c	d	e
3	a	b	c	d	e
4	a	b	c	d	e
5	a	b	c	d	e
6	a	b	c	d	e
7	a	b	c	d	e
8	a	b	c	d	e
9	a	b	c	d	e
10	a	b	c	d	e
11	a	b	c	d	e
12	a	b	c	d	e
13	a	b	c	d	e
14	a	b	c	d	e
15	a	b	c	d	e
16	a	b	c	d	e
17	a	b	c	d	e
18	a	b	c	d	e
19	a	b	c	d	e
20	a	b	c	d	e