Instituto de Matemática e Estatística

MAT0104 — CÁLCULO 1

LISTA DE EXERCÍCIOS 3

PROFESSOR: PAOLO PICCIONE
MONITOR: RENATO GHINI BETTIOL

Exercício 1: Calcule as duas primeiras derivadas de $f(x)$ e explicite seus domínios, nos seguintes casos:

$f(x) = x^{2010}$	$f(x) = 5x^2 + 3x - 7$	$f(x) = (x^2 - 1)\log x$
$f(x) = x + \log x^2$	$f(x) = x \log x^2$	$f(x) = x^x$
$f(x) = \sin x$	$f(x) = \cos 2x$	$f(x) = \sin^2 x + \cos x$
$f(x) = e^{-x}$	$f(x) = e^{\frac{-x^2}{2}}$	$f(x) = 2^x$
$f(x) = \dfrac{1}{\tan x}$	$f(x) = \sec 3x$	$f(x) = e^x \sin x$
$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^4}}$	$f(x) = (1 + x^{2010})^{\frac{1}{2010}}$	$f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

Exercício 2: Encontre a reta tangente ao gráfico $y = f(x)$ no ponto $(1, f(1))$ para todas funções $f(x)$ do Exercício 1.

Exercício 3: O ponto $P = (0, 1)$ está em duas retas tangentes a parábola $y = x^2 + 1$. Encontre as equações dessas duas retas.

Exercício 4: Dadas três funções diferenciáveis $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, calcule a derivada da composta $f \circ g \circ h$.

Exercício 5: Verdadeiro ou falso? (Justifique ou dê um contra-exemplo)

(1) Se uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ não é contínua, então f não é diferenciável;

Date: 7 de Maio 2010.

(2) Dadas funções $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se f é contínua e g é diferenciável, então $f + g$ e $f \circ g$ são diferenciáveis;
(3) Dadas funções $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se f é contínua e g é diferenciável, então $f + g$ e $f \circ g$ são contínuas;
(4) Dadas funções diferenciáveis $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, as funções $f + g$, fg e $f \circ g$ são diferenciáveis;
(5) Suponha que $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções diferenciáveis, com $f'(x) \geq 0$ e $g'(x) \geq 0$. Então fg é crescente;
(6) Suponha que $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções diferenciáveis, com $f'(x) > 0$ e $g'(x) < 0$. Então $f - g$ é decrescente;
(7) Suponha que $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções diferenciáveis, com $f'(x) > 0$ e $g'(x) \geq 0$. Então $2f(x)(g(x) + x)$ é estritamente crescente;

Exercício 6: O ponto $P = (0, 4)$ pertence a uma única reta tangente ao gráfico de $y = x + \frac{1}{x}$, $x > 0$. Determine o valor de a tal que P pertence a reta tangente a esse gráfico no ponto $\left(a, a + \frac{1}{a}\right)$, e escreva a equação dessa reta.
Dica: *Não* será necessário resolver uma equação quadrática em a.

Exercício 7: Uma pedra é derrubada de um penhasco de modo que sua altura $s(t)$ em metros acima do solo após t segundos é dada por

$$s(t) = 80 - 5t^2.$$

(1) Determine a velocidade final v_f com que a pedra atinge o solo, i.e., quando $s(t) = 0$, $t > 0$;
(2) Determine a que altura a pedra atinge velocidade $\frac{1}{2}v_f$.

Exercício 8: Determine para as seguintes funções:
(1) sua derivada $f'(x)$;
(2) os valores de $x \in \mathbb{R}$ para os quais $f(x)$ é crescente;
(3) os pontos críticos de $f(x)$, i.e., os valores de $x \in \mathbb{R}$ tais que $f'(x) = 0$.

$f(x) = x^2 - x$	$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$f(x) = x + \sin x$	$f(x) = \pi$
$f(x) = e^x + 2x$	$f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 1}$	$f(x) = \dfrac{x}{\log x}$	$f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$
$f(x) = 2x^2(1 + \sqrt{x})$	$f(x) = (x - 1)^{x+2}$	$f(x) = \sin x \cos x$	$f(x) = \sin(\sin x)$
$f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$	$f(x) = \sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$f(x) = x^x$	$f(x) = \dfrac{\log x}{x^2 - 1}$

Exercício 8: Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções deriváveis, tais que:
$f(0) = 1,\ g(0) = 2,\ f'(0) = 4,\ g'(0) = -1,\ f(2) = 3,\ f'(2) = 0,\ g(1) = -2,\ g'(1) = 7.$
Calcule:

(1) $f \circ g(0)$;
(2) $g \circ f(0)$;
(3) $f(0) \cdot g(0)$;
(4) $(f \circ g)'(0)$;
(5) $(g \circ f)'(0)$;
(6) $(f \cdot g)'(0)$.