Instituto de Matemática e Estatística

MAT0104 — CÁLCULO 1

LISTA DE EXERCÍCIOS 2

PROFESSOR: PAOLO PICCIONE
MONITOR: RENATO GHINI BETTIOL

Exercício 1: Calcule o limite das sequências abaixo:

$$a_n = \left(\frac{3n^2 - 2n + 1}{3n^2 - 4}\right)^{2n-1} \qquad a_n = \frac{17n + 23}{2 - n^2}$$

$$a_n = \frac{\sin^2 n}{\log n} \qquad a_n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} + x^n, \text{ onde } x > 0$$

$$a_n = \sqrt[n]{n} \qquad a_n = \frac{n!}{n^k x^n}, \text{ onde } k \in \mathbb{N} \text{ e } x > 0$$

$$a_n = \frac{2n}{2n - 1} \qquad a_n = \frac{n \sin n!}{n^2 + 1}$$

$$a_n = \frac{n!}{n^n} \qquad a_n = \frac{(n+1)!}{(n+1)^n}$$

Exercício 2: Dado $x > 0$, defina indutivamente $a_1 = \sqrt{x}$ e $a_n = \sqrt{a_n + x}$. Calcule o limite

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \cdots}}}}_{n}$$

Exercício 3: Verdadeiro ou falso? (Prove ou dê um contra-exemplo)

(1) Dadas sequências a_n e b_n, se $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, então $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = 0$;
(2) Se a_n é limitada e b_n é limitada, então $a_n \cdot b_n$ é limitada;
(3) Se $a_n > 0$ para todo n e $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$, então $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = +\infty$;
(4) Se $a_n \geq 1$ para todo n e $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$, então $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = +\infty$;

Date: 11 de Abril de 2010.

(5) Se a_n é limitada e $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$ então $\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = +\infty$;
(6) Se $a_n < b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\lim_{n\to\infty} a_n < \lim_{n\to\infty} b_n$;
(7) Se $a_n \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n$;
(8) Uma sequência que não é limitada não pode convergir.
(9) se a_n é decrescente, então existe o limite $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Exercício 4: Determine uma expressão *explícita* para as sequências abaixo e calcule o limite $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$:

(1) $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n, \quad a_0 = 0, \quad a_1 = 1;$
(2) $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n, \quad a_0 = 0, \quad a_1 = 1;$
(3) $a_{n+2} = 6a_{n+1} - 9a_n, \quad a_0 = 1, \quad a_1 = -2;$
(4) $a_{n+2} = 2a_{n+1} - 2a_n, \quad a_0 = 0, \quad a_1 = 1.$

Exercício 5: Considere a sequência definida por recorrência $a_{n+1} = F(a_n)$, com a_0 dado. Verifique se a_n converge e, em caso afirmativo, calcule seu limite:

(1) $F(x) = 2 + \log x$, $a_0 = 1$;
Dica: A equação $F(x) = x$ admite duas soluções $\alpha \cong 0.16$ and $\beta \cong 3.15$. No intervalo $]\alpha, \beta[$, $F(x) > x$, e F é estritamente crescente. Na semi-reta $]\beta, +\infty[$, $F(x) < x$ e F continua estritamente crescente.
(2) $F(x) = 2 + \log x$, $a_0 = 4$;
(3) $F(x) = \cos x$, $a_0 = \dfrac{\pi}{2}$;
(4) $F(x) = 1 - x^2$, $a_0 = \dfrac{1}{2}$.

Exercício 6: Calcule os limites:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{x}\right)^{1+x} \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{2x+1} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{\log(1+x)} \qquad \lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} x\sin\frac{1}{x} \qquad \lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 3x} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x} \qquad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2} \qquad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+x-1}{x^3-2x+7}\right) \qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{3x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{(e^x-1)^2} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{3^{2x}-1}{\sin\pi x} \qquad \lim_{x\to+\infty} x^x \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\log x}{x^2-1}$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{3}{x}} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin\pi x} \qquad \lim_{x\to 2}\frac{(x^2-5x+6)(x+1)}{x-2} \qquad \lim_{x\to\pi}\frac{x^2-\pi^2}{x-\pi}$$