Instituto de Matemática e Estatística

**MAT0104 — CÁLCULO 1**

**LISTA DE EXERCÍCIOS 1**

PROFESSOR: PAOLO PICCIONE
MONITOR: RENATO GHINI BETTIOL

**Exercício 1:** Prove que existe a inversa da função $f : [a, b] \to [c, d]$ dada, e calcule $f^{-1}$.

(1) $f : [-\pi, -\frac{\pi}{2}] \to [-2, 0]$, $f(x) = -2\sin x$;
(2) $f : [1, +\infty[ \to [1, +\infty[$, $f(x) = x^2 - 2x + 2$;
(3) $f : [2, +\infty[ \to [0, +\infty[$, $f(x) = \sqrt{2}\log(2x - 3)$;
(4) $f : [0, \pi] \to \left[\frac{1}{e}, e\right]$, $f(x) = e^{\cos x}$.

**Exercício 2:** Determinar as soluções das seguintes desigualdades:

(1) $\dfrac{1 - x}{x^2 + x + 2} \geq 1$;
(2) $|2x - 4| + |8 - 3x| < 3$;
(3) $2 < |x - 1| < 4$;
(4) $(x^2 - 9x - 10)(x^2 - 4x + 4) \leq 0$;
(5) $\dfrac{3x}{x^2 - 4} < -1$;
(6) $\dfrac{(x^2 + 2x - 3)(x^2 + 5x + 6)}{-3x - 6} \geq 0$.

**Exercício 3:** Determine o domínio e calcule, quando possível, as funções compostas $f \circ g$ e $g \circ f$:

(1) $f(x) = \cos(2x + 3)$, $g(x) = 1 - x^2$;
(2) $f(x) = x^3 - 2x + 1$, $g(x) = x^{2010}$;
(3) $f(x) = \log(x - 1)$, $g(x) = 2^x$;
(4) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $g(x) = \sin x$;
(5) $f(x) = \sqrt[4]{x}$, $g(x) = 1 - x^4$.

**Exercício 4:** Prove por indução as seguintes afirmações:

(1) $2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = n(n + 1)$;

*Date*: 15 de Março de 2010.

(2) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(2n+1)(n+1)}{6}$;
(3) $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1$;
(4) $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$;
(5) $n! > n^2$ para todo $n \geq 4$;
(6) $(1+x)^n > 1 + nx$ para $n \geq 2$ e $x$ inteiro positivo.

**Exercício 5:** Seja $A$ um conjunto não vazio. Prove que toda função $f : A \to \mathbb{R}$ pode ser escrita como soma $f = f^+ + f^-$, onde $f^+ : A \to \mathbb{R}$ satisfaz $f^+(x) \geq 0$ e $f^- : A \to \mathbb{R}$ satisfaz $f^-(x) \leq 0$ para todo $x \in A$.
*Dica: Utilize* $\max$ *e* $\min$.

**Exercício 6:** Prove que toda função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pode ser escrita como soma $f = f^+ + f^-$, onde $f^+ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é par, i.e. $f^+(-x) = f^+(x)$ e $f^- : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é ímpar, i.e. $f^-(-x) = -f^-(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
*Dica: Considere as funções* $f(x) + f(-x)$ *e* $f(x) - f(-x)$.

**Exercício 7:** Verdadeiro ou falso?

(1) A soma de duas funções crescentes é crescente;
(2) Se $f$ e $g$ são crescentes, entao $f \circ g$ é crescente (onde for definida);
(3) Se $f \geq 0$ e $g \leq 0$, então $f \circ g \leq 0$;
(4) Se $f$ e $g$ são sobrejetivas, então $f \circ g$ é sobrejetiva;
(5) Se $f$ e $g$ são injetivas, então $f \circ g$ é injetiva;
(6) Se $f$ é par e $g$ é ímpar, então $f \cdot g$ é ímpar.

**Exercício 8:** Resolva as equações, com $x \in \mathbb{R}$:

(1) $5(\cos x)^2 - 3\cos x + \frac{2}{5} = 0$
(2) $\sin^4 x - 3\sin^2 x + 2 = 0$
(3) $4\cos^2 x + 2(1+\sqrt{3})\sin x = 4 + \sqrt{3}$
(4) $[\log(x-4)]^2 + 2\log 9 \log(x-4) = \log^2 3 + \log^2 9$
(5) $e^{\cos x + \sin x} - \left(\dfrac{1}{e}\right)^{\cos x - \sin x} = 0$