MAT 220 — Cálculo Diferencial e Integral IV

Prof. Paolo Piccione

Prova 2

28 de novembro de 2019

Nome: ____

Número USP: ____

Assinatura: ____

Instruções

- A duração da prova é de **duas horas**.
- Assinale as alternativas corretas na **folha de respostas** que está no final da prova. *É permitido deixar questões em branco.*
- Cada questão tem apenas **uma resposta correta**.
- O valor total da prova é de **10** pontos; cada questão correta vale $\mathbf{\frac{1}{2}}$ ponto (0.5) e *cada questão errada implica num desconto de* $\mathbf{\frac{1}{10}}$ *de ponto* (0.10).
- No final da prova, deve ser entregue apenas a folha de respostas (na última página).
- **Boa Prova!**

Terminologia e Notações Utilizadas na Prova

- O corpo dos número complexos é denotado por $\mathbb{C}$. A *unidade imaginária* é denotada por i. Dado um número complexo $z \in \mathbb{C}$, a *parte real* e a *parte imaginária* de z são denotadas respectivamente por $\Re(z)$ e $\Im(z)$. Assim, $z = \Re(z) + \mathrm{i}\,\Im(z)$.
- Dado um número complexo z_0 e um número positivo R, $D(z_0; R)$ denota o disco aberto centrado em z_0 e de raio R, e $\overline{D(z_0; R)}$ denota o disco fechado. O símbulo $D(z_0; R)^*$ denota o conjunto $D(z_0; R) \setminus \{z_0\}$.
- Dado $z_0 \in \mathbb{C}$, e $0 \leq \rho_1 < \rho_2$, $A(z_0; \rho_1, \rho_2)$ denota o anel aberto
$$\big\{z \in \mathbb{C} : \rho_1 < |z - z_0| < \rho_2\big\}.$$
- Dada uma função holomorfa $f \colon D(a; R)^* \to \mathbb{C}$ com uma singularidade isolada em a, $\operatorname{res}(f; a)$ é o *resíduo* de f em a.

NÃO ESQUEÇA DE POR SEU NOME NA FOLHA DE RESPOSTAS!!!

$\boxed{\mathbf{B}}$

Questão 1. *Calcule a integral complexa* $\displaystyle\int_\gamma \frac{\sin(\pi z)}{z^2+2z+1}\,\mathrm{d}z$, *onde* γ *é o círculo centrado em* $z_0 = 0$, *de raio* $R = 2$, *e orientado no sentido* ***anti-horário***.

(a) $2\pi^2\mathrm{i}$;
(b) $2\pi\mathrm{i}$;
(c) $-2\pi^2\mathrm{i}$;
(d) $-2\pi\mathrm{i}$;
(e) $-2\pi^2$.

Questão 2. *Seja* $r = 10^{-5}$, *e* $f(z) = e^{1/z} - \mathrm{i}$. *Determine* $f\big(D(0;r)^*\big)$.

(a) $\mathbb{C}\setminus\{\mathrm{i}\}$;
(b) $\mathbb{C}$;
(c) $D(1;e^r)\setminus\{-\mathrm{i}\}$;
(d) $\mathbb{C}\setminus\{-\mathrm{i}\}$;
(e) $D(1;e^r)^*$.

Questão 3. *Calcule a integral complexa* $\displaystyle\int_\gamma \frac{2z^3-3z^2+z-5}{z^2+1}\,\mathrm{d}z$, *onde* γ *é o círculo centrado em* $z_0 = \mathrm{i}$, *de raio* $R = 1$, *e orientado no sentido* ***horário***.

(a) $-2\pi\mathrm{i}$;
(b) $\pi(\mathrm{i}+2)$;
(c) $-5\mathrm{i}$;
(d) 0;
(e) $2\pi\mathrm{i}$.

Questão 4. *Seja* $f\colon \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ *uma função inteira, que satisfaz*

$$\big|f(z)\big| \le \frac{1}{|z|}$$

para todo z *fora do disco de centro* $z_0 = 0$ *e raio* $R = 2$. *O que podemos afirmar sobre a função* f*?*

(a) $\displaystyle\lim_{|z|\to+\infty} zf(z) = 1$;
(b) $|f(z)| \ge \dfrac{1}{|z|^2}$ para todo z com $|z| > R$;
(c) $|f(z)| \ge \dfrac{1}{|z|}$ para todo z com $|z| < R$;
(d) $f(z) = \frac{1}{z}$ para todo $z\in\mathbb{C}$;
(e) $f(z) = 0$ para todo $z\in\mathbb{C}$.

Questão 5. *Calcule a ordem do polo de* $f(z) = \dfrac{1}{z^4 - z^5}$ ***no ponto*** $\mathbf{a} = \mathbf{1}$.

(a) 5;
(b) 2;
(c) 1;
(d) 3;
(e) 4.

Questão 6. *Calcule a integral complexa* $\displaystyle\int_\gamma \frac{\log z}{z^n}\,\mathrm{d}z$*, onde* $n \geq 1$ *é um inteiro, e* γ *é o círculo centrado em* $z_0 = 1$*, de raio* $R = \frac{1}{4}$*, e orientado no sentido* ***anti-horário****.*

(a) $\frac{2\pi \mathrm{i}}{(n-1)!}$;
(b) $\frac{2\mathrm{i}}{(n-1)!}$;
(c) $\frac{1}{n!}$;
(d) 0;
(e) $-\frac{2\pi \mathrm{i}}{(n-1)!}$.

Questão 7. *Seja* $U \subset \mathbb{C}$ *um domínio, e* $f\colon U \to \mathbb{C}$ *uma função holomorfa. Quais das seguintes afirmações é verdadeira?*

(A) f *é analítica em* U*;*
(B) *se* γ *é uma curva em* U *suave e fechada, então* $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$*;*
(C) f *admite uma primitiva em* U*.*

(a) Todas as afirmações são verdadeiras;
(b) Somente as afirmações (A) e (B) são verdadeiras;
(c) Somente a afirmação (A) é verdadeira;
(d) Nenhuma afirmação é verdadeira;
(e) Somente as afirmações (B) e (C) são verdadeiras.

Questão 8. *Calcule* $\displaystyle\int_\gamma \frac{\sin z}{\cos z}\,\mathrm{d}z$*, onde* γ *é o círculo centrado em* 0*, de raio* $R = 2$*, e orientado no sentido anti-horário.*

(a) $-4\pi\mathrm{i}$;
(b) $-2\pi\mathrm{i}$;
(c) 0;
(d) -2;
(e) $2\pi\mathrm{i}$.

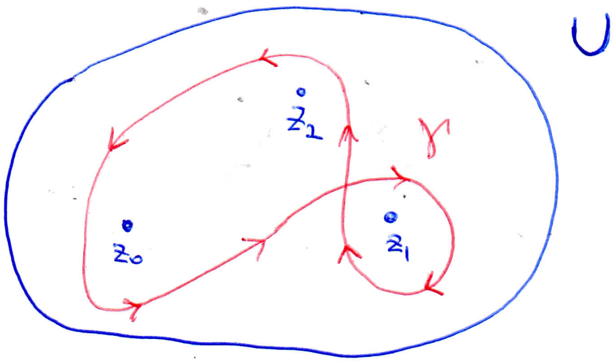

FIGURA 1. Figura referente à Questão 10.

Questão 9. *Classifique a singularidade* 0 *para a função:*

$$f(z) = \frac{\sin z - z}{z^3}.$$

(a) 0 é um polo de ordem 3;
(b) 0 é uma singularidade removível;
(c) 0 é um polo de ordem 1;
(d) 0 é uma singularidade essencial;
(e) 0 é um polo de ordem 2.

Questão 10. *Seja $U \subset \mathbb{C}$ um domínio, $z_0, z_1, z_2 \in U$ pontos distintos, e γ um caminho suave em U como na Figura 1. Seja $f\colon U \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa, com:*

$$f(z_0) = \mathrm{i}, \quad f'(z_0) = 1, \quad f(z_1) = 0,$$
$$f'(z_1) = 0, \quad f(z_2) = -1, \quad f'(z_2) = 2 - \mathrm{i}.$$

Calcule $\displaystyle\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)(z-z_1)^2(z-z_2)}\,\mathrm{d}z.$

(a) $2\pi\mathrm{i}\left[\dfrac{\mathrm{i}}{(z_0-z_1)^2(z_0-z_2)} - \dfrac{1}{(z_2-z_1)^2(z_2-z_0)}\right];$

(b) $2\pi\mathrm{i}\left[\dfrac{2-\mathrm{i}}{(z_0-z_1)^2(z_0-z_2)} - \dfrac{1}{(z_2-z_1)^2(z_2-z_0)}\right];$

(c) $2\pi\mathrm{i}\left[\dfrac{2-\mathrm{i}}{(z_0-z_1)^2(z_0-z_2)} + \dfrac{1}{(z_2-z_1)^2(z_2-z_0)}\right];$

(d) $2\pi\mathrm{i}\left[\dfrac{\mathrm{i}}{(z_0-z_1)^2(z_0-z_2)} - \dfrac{2-\mathrm{i}}{(z_2-z_1)^2(z_2-z_0)}\right];$

(e) $2\pi\mathrm{i}\left[\dfrac{1}{(z_0-z_1)^2(z_0-z_2)} - \dfrac{\mathrm{i}}{(z_2-z_1)^2(z_2-z_0)}\right].$

Questão 11. *Localize e classifique as singularidades isoladas da função:*

$$f(z) = \frac{\sin z}{1 + z + z^2 + z^3}.$$

(a) $-\mathrm{i}, \pm 1$, e cada singularidade é um polo de ordem 1;

(b) $\pm\mathrm{i}, \pm 1$, e cada singularidade é um polo de ordem 1;

(c) $\pm\mathrm{i}$, e cada singularidade é um polo de ordem 2;

(d) ± 1, e cada singularidade é um polo de ordem 2;

(e) $\pm\mathrm{i}, -1$, e cada singularidade é um polo de ordem 1.

Questão 12. *Calcule a integral real:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^3}\,\mathrm{d}x$$

(a) $\dfrac{5\pi}{8}$;

(b) $\dfrac{\pi}{2}$;

(c) $\dfrac{\pi}{16}$;

(d) $\dfrac{3\pi}{8}$;

(e) $\dfrac{\pi}{8}$.

Questão 13. *Qual é a expansão de Laurent da função $f(z) = \dfrac{z}{1-z}$* ***centrada em*** $\mathbf{a = 1}$*?*

(a) $-1 - \dfrac{1}{z-1}$;

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\, z^{n+1}$;

(c) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} n(z-1)^{n-1}$;

(d) $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{(z-1)^{n+1}}$;

(e) $\sum_{n=0}^{\infty} z^{n+1}$.

Questão 14. *Em qual anel é convergente a expansão de Laurent da função:*

$$f(z) = \frac{z^4 + 3z^3}{(z-1)^2(z+\mathrm{i})^3}$$

centrada no ponto $a = -\mathrm{i}$*?*

(a) $D(-\mathrm{i}; 0, \sqrt{3})$;
(b) $D(-\mathrm{i}; 0, 2)$;
(c) $D(\mathrm{i}; 0, \sqrt{2})$;
(d) $D(-\mathrm{i}; 0, \sqrt{2})$;
(e) $D(-\mathrm{i}; 0, 2)$.

Questão 15. *Seja* f *uma função holomorfa no disco de centro* 0 *e raio* 2*, e* γ *o círculo centrado em* 0*, de raio* 1*, orientado no sentido anti-horário. Sabendo que* $\displaystyle\int_\gamma \frac{f(z)\sin z}{z^3}\,\mathrm{d}z = 2\pi$*, calcule* $f'(0)$*.*

(a) $f'(0) = -\frac{1}{\pi}$;
(b) $f'(0) = -\frac{1}{2}\mathrm{i}$;
(c) $f'(0) = -\mathrm{i}$;
(d) $f'(0) = -1$;
(e) não é possível conhecer o valor de $f'(0)$ sabendo o valor da integral dada.

Questão 16. *Calcule o resíduo* $\operatorname{res}(f; 0)$*, onde* $f(z) = \dfrac{z}{1 - \cos z}$.

(a) $-\frac{1}{2}$;
(b) $\frac{1}{2}$;
(c) 0;
(d) 2;
(e) 1.

Questão 17. *Seja* $a \in \mathbb{C}$*,* $r > 0$ *e* $f\colon D(a; r)^* \to \mathbb{C}$ *uma função holomorfa (lembre que* $D(a; r)^* = D(a; r) \setminus \{a\}$*). Sabendo que existem duas sequências* $(z_n)_{n\geq 0}$ *e* $(w_n)_{n\geq 0}$ *em* $D(a; r)^*$ *tais que:*

- $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty} w_n = a$*;*
- $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = \mathrm{i}$ *e* $\lim\limits_{n\to\infty} f(w_n) = -\mathrm{i}$*,*

o que podemos concluir?

(a) $|f|$ é limitada em $D(a; r)^*$;
(b) a é um polo de ordem 2 para f;
(c) a é uma singularidade eliminável para f;
(d) $f(z) \neq 0$ para todo $z \in D(a; r)^*$;
(e) a é uma singularidade essencial para f.

Questão 18. *Qual é o enunciado correto do Princípio do Módulo Máximo?*

(a) Se $U \subset \mathbb{C}$ é um domínio, $f\colon U \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa, e se existe $z_0 \in U$ com $|f(z_0)| \leq |f(z)|$ para todo $z \in U$, então f é constante em U;

(b) Se $U \subset \mathbb{C}$ é um domínio, $f\colon U \to \mathbb{C}$ uma função contínua, e se existe $z_0 \in U$ com $|f(z_0)| \geq |f(z)|$ para todo $z \in U$, então f é holomorfa em U;

(c) Se $U \subset \mathbb{C}$ é um domínio, $f\colon U \to \mathbb{C}$ uma função contínua, e se existe $z_0 \in U$ com $|f(z_0)| \geq |f(z)|$ para todo $z \in U$, então U é limitado;

(d) Se $U \subset \mathbb{C}$ é um domínio, $f\colon U \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa, e se existe $z_0 \in U$ com $|f(z_0)| \leq |f(z)|$ para todo $z \in U$, então existe $z_1 \in U$ tal que $f(z_1) = 0$;

(e) Se $U \subset \mathbb{C}$ é um domínio, $f\colon U \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa, e se existe $z_0 \in U$ com $|f(z_0)| \geq |f(z)|$ para todo $z \in U$, então f é constante em U.

Questão 19. *Quantos são os zeros do polinômio $g(z) = z^4 - 5z^2 + 1$ no disco $|z| < 1$?* **Sugestão:** aplique o Teorema de Rouché com $f(z) = -5z^2$.

(a) 1;

(b) 0;

(c) 2;

(d) 3;

(e) 4.

Questão 20. *Se a é uma singularidade isolada de uma função holomorfa $f\colon D(a,R)^* \to \mathbb{C}$ tal que $\big|f(z)\big| \geq \dfrac{1}{|z-a|^3}$ para todo $z \in D(a,R)^*$, o que podemos concluir?*

(a) a é um polo de ordem $k \leq 4$ para f;

(b) a imagem $f\big(D(a;r)^*\big)$ é densa em $\mathbb{C}$;

(c) a é uma singularidade eliminável para $g(z) = (z-a)^3 f(z)$;

(d) a é um polo de ordem $k \geq 3$ para f;

(e) a pode ser uma singularidade essencial.

MAT 220 — Cálculo Diferencial e Integral IV
Prof. Paolo Piccione
Prova 2
28 de novembro de 2019

Nome: ____

Número USP: ____

Assinatura: ____

Folha de Respostas $\boxed{\textbf{B}}$

1	a	b	c	d	e
2	a	b	c	d	e
3	a	b	c	d	e
4	a	b	c	d	e
5	a	b	c	d	e
6	a	b	c	d	e
7	a	b	c	d	e
8	a	b	c	d	e
9	a	b	c	d	e
10	a	b	c	d	e
11	a	b	c	d	e
12	a	b	c	d	e
13	a	b	c	d	e
14	a	b	c	d	e
15	a	b	c	d	e
16	a	b	c	d	e
17	a	b	c	d	e
18	a	b	c	d	e
19	a	b	c	d	e
20	a	b	c	d	e

Deixe em branco.

Corretas	Erradas	Nota