Lista 3 de Cálculo para Funções de Várias Variáveis II (MAT2352)

Monitor: Renato Ghini Bettiol (renatobettiol@gmail.com)

5 de novembro de 2007

1 Parte I: Integrais de linha

Questão 1 (Guidorizzi[1], 36.1 ex 1c,e e Extras)**.** *Calcule a integral de linha $\int_{C_i} F_i d\gamma_i$ dos campos vetoriais F_i nos caminhos C_i dados pelas curvas diferenciáveis γ_i abaixo, assumindo as hipóteses necessárias e usando parametrizações adequadas.*

(i) $F_1(x, y) = (x+y, x-y), C_1$ *a elipse dada por* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a, b \in \mathbb{R}_+$, *percorrida no sentido anti-horário*

(ii) $F_2(x, y) = x^2\vec{j}, \gamma_2(t) = (t^2, 3), -1 \leq t \leq 1$

(iii) $F_3(x, y, z) = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}, \gamma_3(t) = (2\cos t, 3\sin t, t), 0 \leq t \leq \pi$

(iv) $F_4(x, y, z) = (y, z, x), C_4$ *a interseção das superfícies* $x + y = 2$ *e* $x^2 + y^2 + z^2 = 2(x + y)$, *de modo que a projeção no plano xOy seja percorrida no sentido anti-horário*

Questão 2 (Guidorizzi, 36.2 ex 1,3,4)**.** *Calcule as seguintes integrais de linha, nas mesmas condições da questão anterior.*

(i) $\int_\gamma xdx + ydy$, *γ dada por $x = t^2$ e $y = \sin t$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$*

(ii) $\int_\gamma xdx + ydy + zdz$, *$\gamma$ o segmento de extremos $A = (0, 0, 0)$ e $B = (1, 2, 1)$, percorrido de B para A*

(iii) $\int_\gamma xdx + dy + 2dz$, *$\gamma$ a interseção de $z = x^2 + y^2$ e $z = 2x + 2y - 1$, de modo que a projeção no plano xOy seja percorrida no sentido anti-horário*

Questão 3. *Mostre que a integral da função $f(x, y)$ relativa ao comprimento de arco ($\int_\gamma f ds$) ao longo do caminho dado em coordenadas polares por $r = r(\theta)$, $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ é dada por*

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}d\theta$$

[1] GUIDORIZZI, H. L. Um curso de Cálculo (Vol 3). LTC, 1987. DEDALUS QA308 G948c

Questão 4. *Calcule* $\int_\gamma f ds$, *onde* $f(x, y, z) = z$ *e* $\gamma(t) = (t\cos t, t\sin t, t), 0 \leq t \leq t_0$ *e esboce a curva no* $\mathbb{R}^3$.

Questão 5. *Sejam* $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *um campo vetorial contínuo e* $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ *um caminho* C^1 *por partes.*

(i) *Supondo que* F *é ortogonal a* γ' *em* $\gamma(t)$ *para todo* $t \in I$, *i.e.* $F(\gamma) \perp \gamma', \forall t \in I$, *mostre que* $\int_\gamma F d\gamma = 0$.

(ii) *Supondo que* F *é paralelo a* γ', *i.e.* $\exists \lambda : I \to \mathbb{R}_+$, *tal que* $F(\gamma(t)) = \lambda(t)\gamma'(t), \forall t \in I$, *mostre que* $\int_\gamma F d\gamma = \int_\gamma ||F|| ds$.

(iii) *Supondo que o comprimento de arco de* γ *é* l, *mostre que se* $||F(\gamma(t))|| \leq M, \forall t \in I$, *então* $\left|\int_\gamma F d\gamma\right| \leq Ml$.

Questão 6. *Seja* $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}$ *uma curva com* $\gamma'(t) \neq 0, \forall t \in [a, b]$ *(nesse caso,* γ *é dita regular). Considere* $S(t) \doteq \int_a^t ||\gamma'(\tau)|| d\tau$.

(i) *Calcule* $\frac{\partial S}{\partial t}$,

(ii) *Mostre que* $S : [a, b] \to [0, l]$, *onde* l *é o comprimento de arco de* γ, *tem inversa diferenciável* $T : [0, l] \to [a, b]$, *com* $S \circ T(s) = s, T \circ S(t) = t$ *(Dica: Teorema da função inversa para funções de uma variável),*

(iii) *Calcule* $\frac{\partial T}{\partial s}$,

(iv) *Mostre que a reparametrização de* γ *dada por* $\eta(s) \doteq \gamma(T(s))$ *tem rapidez unitária, i.e.* $||\eta'(t)|| = 1, \forall t \in [0, l]$.

Questão 7. *Calcule a massa do fio formado pela interseção da esfera* $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ *e o plano* $x + y + z = 0$, *se a densidade no ponto* (x, y, z) *é dada por* $\varrho(x, y, z) = x^2$.

2 Parte II: Trabalho de forças e Campos conservativos

Questão 8. *Suponha* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *continuamente diferenciável (classe* C^1*), com* $\nabla f(x, y, z) = (2xyze^{x^2}, ze^{x^2}, ye^{x^2})$ *e* $f(0, 0, 0) = 5$. *Mostre que* ∇f *é irrotacional e calcule* $f(1, 1, 2)$. *(Dica: Encontre uma expressão para* $f(x, y, z)$ *a partir das informações dadas)*

OBS: Nesse caso, f *é uma função potencial, a ser reconstruída a partir do campo conservativo (irrotacional)* $\nabla f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

Questão 9. *Considere o campo gravitacional* $F(p) = r^{-3}p$, *onde* $p = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ *e* $r \doteq ||p||$. *Mostre que o trabalho realizado pela força gravitacional ao movimentar uma partícula de* p_1 *a* p_2 *depende apenas de* $r(p_1)$ *e* $r(p_2)$, *interprete geometricamente.*

Questão 10 (Apostol[2], 5.3 ex 10). *Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um campo bidimensional dado por $f(x,y) = cxy\vec{i} + x^6y^2\vec{j}$, com $c \in \mathbb{R}^*_+$. Sabendo que a força age sobre uma partícula que deve mover-se de $(0,0)$ até a linha vertical $x = 1$ ao longo de uma curva da forma $\gamma(t) = (t, at^b), a, b > 0$, encontre a (em termos de c) de modo que a força não dependa de b.*

Questão 11 (Apostol, 5.9 ex 2). *Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um campo tridimensional dado por $f(x,y,z) = y\vec{i} + z\vec{j} + yz\vec{k}$. Verifique se f é conservativo e calcule o trabalho para mover uma partícula ao longo da curva $r(t) = \cos t\vec{i} + \sin t\vec{j} + e^t\vec{k}$, para $t \in [0, \pi]$.*

Questão 12 (Apostol, 5.9 ex 5). *Seja o campo radial bidimensional $F(x,y) = f(r)\vec{r}$, onde $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$ e $r = ||\vec{r}||$. Mostre que F é conservativo.*

Questão 13. *Se um campo vetorial central (ou radial) definido em $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ pode ser escrito como $f(x) = r^p x, p \in \mathbb{R}$, mostre que f é conservativo encontrando um potencial $\varphi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, com $\nabla\varphi = f$. (Dica: Tratar separadamente o caso $p = -2$)*

3 Teorema de Green

Questão 14. *Seja D uma região satisfazendo as hipóteses do Teorema de Green. Suponha $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ harmônica, i.e. $\nabla^2 f = 0$. Mostre que $\int_{\partial D}\left(\frac{\partial f}{\partial y}dx - \frac{\partial f}{\partial x}dy\right) = 0$.*

Questão 15. *Seja R uma região limitada pela curva dada em coordenadas polares por $r = r(\theta), \theta \in [\theta_0, \theta_1]$. Mostre que a área de R é $\frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\theta_1} r^2 d\theta$.*

Questão 16. *Analogamente à relação $\int_a^b f(t)g'(t)dt = f(t)g(t)\mid_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)dt$, para integrais de funções $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1, demonstre as seguintes relações, usando o Teorema de Green, se R é uma região do plano satisfazendo as hipóteses desse teorema e $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ são de classe C^2:*

(i)

$$\int\int_R \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} g dxdy = \int_{\partial R}\left(\frac{\partial f}{\partial x}g - f\frac{\partial g}{\partial x}\right)dy + \int\int_R f\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}dxdy$$

(ii)

$$\int\int_R \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} g dxdy = \int_{\partial R}\left(f\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}g\right)dx + \int\int_R f\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}dxdy$$

(iii)

$$\int\int_R \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} g dxdy = \int_{\partial R} f\frac{\partial g}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}g dy + \int\int_R f\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}dxdy$$

Questão 17. *Calcule $\int_{\partial R}((y^2 + x^3)dx + x^4 dy)$, onde $R = [0,1] \times [0,1]$, e ∂R está orientado no sentido anti-horário.*

[2]APOSTOL, T. M. Calculus (Vol 2) - Calculus of several variables with applications to probability and vector analysis. Blaisdell Publishing, 1965. DEDALUS QA308 A645c

Derivadas normais: Seja $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ uma curva regular. Se $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, então o vetor normal unitário exterior η a γ em t é dado por

$$\eta(t) = \left(\frac{y'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}, \frac{-x'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}} \right)$$

Assim tem-se imediatamente $||\eta(t)|| = 1$ e $\langle \gamma'(t), \eta(t) \rangle = 0, \forall t \in [a, b]$. Se ϕ é diferenciável em $\mathbb{R}^2$, define-se a derivada normal de ϕ ao longo de γ como a derivada direcional de ϕ na direção de η, i.e. $\frac{\partial \phi}{\partial \eta} \doteq \langle \nabla \phi, \eta \rangle$.

Questão 18. *Se $F = (Q, -P)$, mostre que $\int_\gamma (Pdx + Qdy) = \int_\gamma \langle F, \eta \rangle ds$.*

Questão 19. *Sejam $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funções de classe C^2, e $R \subset \mathbb{R}^2$ uma região que tem γ como fronteira, sendo γ curva de Jordan regular. Mostre que*

(i)

$$\int_\gamma \frac{\partial g}{\partial \eta} ds = \int \int_R \nabla^2 g dxdy$$

(ii)

$$\int_\gamma f \frac{\partial g}{\partial \eta} ds = \int \int_R (f \nabla^2 g + \langle \nabla f, \nabla g \rangle) dxdy$$

(iii)

$$\int_\gamma \left(f \frac{\partial g}{\partial \eta} - g \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) ds = \int \int_R (f \nabla^2 g - g \nabla^2 f) dxdy$$

OBS: O item (iii) é tido como a fórmula original de Green.

Questão 20. *Se f, g são harmônicas, i.e., tem laplaciano nulo, mostre que $\int_\gamma f \frac{\partial g}{\partial \eta} ds = \int_\gamma g \frac{\partial f}{\partial \eta} ds$.*