MAT 4903-2 Geometria Lorentziana Global

Paolo Piccione, Outubro 2006

Lista de Exercícios 3

Seja (M, g) um espaço-tempo; usaremos a seguinte:

Definição. *Seja $\gamma : I \to M$ uma curva contínua. Diremos que γ é causal orientada no futuro se para toda vizinhança convexa U de M, e para todo intervalo $[t_1, t_2] \subset I$, $t_1 < t_2$, tal que $\gamma\big([t_1, t_2]\big) \subset U$, vale $\gamma(t_1) \leq_U \gamma(t_2)$ e $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$. Curvas causais orientadas no passado são definidas analogamente.*

(1) Assuma que (M, g) é fortemente causal; mostre que qualquer curva limite de uma seqüência de curvas causais orientadas no futuro é causal e orientada no futuro.

(2) Assuma que a variedade M seja munido de uma métrica Riemanniana completa. Seja $\gamma_n : I \to M$ uma seqüência de curvas causais orientadas no futuro, tais que $\gamma_n|_{[a,b]}$ converge uniformemente a $\gamma|_{[a,b]}$ para todo intervalo compacto $[a, b] \subset I$. Mostre que γ é causal e orientada no futuro.

(3) Prove que, dado $p \in M$, existe um sistema de coordenadas $(x, t) : U \to S \times\,]a, b[$ definido numa vizinhança U de p tal que a métrica g, nessas coordenadas, se escreve como $g(x, t) = g_t(x) - \mathrm{d}t^2$, onde g_t é uma metrica Riemanniana em S que depende (suavemente) do parâmetro t, e ∂_t é de tipo tempo e orientado no futuro (veja [1], página 53).

(4) Prove o seguinte enfraquecimento da definição de global hiperbolicidade: seja (M, g) um espaço-tempo causal tal que $J^+(p) \cap J^-(q)$ é compacto para todo par de pontos $p \leq q$, então (M, g) é globalmente hiperbólico (veja [2]).

(5) Prove que as noções de futuro (resp., passado) cronológico e causal não dependem da escolha da regularidade (C^1 por partes ou absolutamente contínuas) na definição de curva causal orientada no futuro (resp., no passado).

Referências.

[1] R. Penrose, *Techniques of differential topology in Relativity*, SIAM, Philadelphia, 1972.

[2] E. Minguzzi, M. Sánchez, *The causal hierarchy of spacetimes*, Recent developments in pseudo-Riemannian geometry, ESI–Series on Mathematical Physics, EMS Publishing House.