

**MAT 103 — COMPLEMENTOS DE MATEMÁTICA PARA
CONTABILIDADE E ADMINISTRAÇÃO**

LISTA DE EXERCÍCIOS 2

Exercício 1. Identifique os pontos de acumulação das seguintes sequências (lembrando que a é uma ponto de acumulação se, e somente se, existe uma subsequência que converge para a).

- (a) $(0, 0, 0, \dots)$
- (b) $(1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots)$
- (c) $(0, 1, 0, 1/2, 0, 1/3, 0, 1/4, \dots)$
- (d) $f(n) = (-1)^n$
- (e) $(1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, \dots)$
- (f) Os racionais são enumeráveis. Seja $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ uma enumeração dos racionais. Identifique os pontos de acumulação dessa sequência.

Propriedades de limites: Se $\lim a_n = a$ e $\lim b_n = b$ então

- (i) $\lim a_n + b_n = a + b$
- (ii) $\lim a_n - b_n = a - b$
- (iii) $\lim a_n \cdot b_n = a \cdot b$
- (iv) $\lim \left(\frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{a}{b}$ se $b \neq 0$

Obs.: No item (iv) acima, ao formar a seq. a_n/b_n estamos nos limitando aos índices suficientemente grandes de forma que $b_n \neq 0$.

Exercício 2. Calcule o limite das seguintes sequências. (quando existir). Indique também os casos em que a sequência diverge para $+\infty$ ou $-\infty$. Em cada item indique quais das propriedades acima foram usadas (caso alguma tenha sido usada).

- (a) $f(n) = a$
- (b) $f(n) = n$
- (c) $f(n) = \frac{1}{n}$
- (d) $f(n) = 7n + 3$
- (e) $f(n) = 10 - \frac{(-1)^n}{n}$
- (f) $f(n) = 2n + \frac{3}{n}$
- (g) $f(n) = \frac{n+2}{2n-5}$

Exercício 3. Usando a propriedade de limite (iii) acima e usando indução mostre a seguinte propriedade (v) se $\lim a_n = a$ então $\lim(a_n)^p = a^p$ com $p \in \mathbb{N}$.

Exercício 4. Usando a seguinte identidade:

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

mostre a seguinte propriedade (vi) se $\lim a_n = a$ então $\lim(a_n)^{1/q} = a^{1/q}$ com $p \in \mathbb{N}_*$. Conclua com o exercício anterior que vale (vii) se $\lim a_n = a$ então $\lim(a_n)^r = a^r$ com $r \in \mathbb{Q}$.

Exercício 5. Calcule o limite das seguintes sequências. (quando existir). Indique também os casos em que a sequência diverge para $+\infty$ ou $-\infty$. Em cada item indique quais das propriedades acima (i)-(vii) foram usadas (caso alguma tenha sido usada).

- (a) $f(n) = \frac{n^2 - 3n + 1}{3n + 1}$
- (b) $f(n) = \frac{n + 3}{n^2 + 2n + 8}$
- (c) $f(n) = \frac{n^7 - 8n}{n}$
- (d) $f(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^7$
- (e) $f(n) = \left(a + \frac{1}{n}\right)^s$ com $s \in \mathbb{Q}$
- (f) $f(n) = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
- (g) $f(n) = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}}$
- (g) $f(n) = \frac{1}{\sqrt{n}}$
- (g) $f(n) = \sqrt{n^2 + n} - n$

Exercício 6. Observe que se $a \in \mathbb{R}$ e $0 < a < 1$ então podemos escrever a como $\frac{1}{(1+h)}$ com $h > 0$ e se $a > 1$ então $a = 1 + h$ com $h > 0$. Usando a desigualdade de Bernoulli $1 + nr \leq (1 + r)^n$ com $n \in \mathbb{N}$ e $r \in \mathbb{R}$ com $r > -1$, calcule $\lim a^n$ com $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$.

Exercício 7. Calcule o limite das seguintes funções (quando existir).

- (a) $\lim_{x \rightarrow 3} (7x - 6)$
- (b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{10}{3+x}$
- (c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5}{x-1}$
- (d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{6}{2x-4}$
- (e) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x-9}{x-3}$
- (f) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2+3x}{x^2-x+3}$
- (g) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-3-2x^2}{1+3x}$
- (h) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{4x}{x+3}$

- (i) $\lim_{x \rightarrow -3} \left(\frac{4x}{x+3} + \frac{12}{x+3} \right)$
 (j) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x^2-x+3)}{x^2+x-2}$
 (k) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{|x|}$
 (l) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{|x|}$
 (m) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{|x|}$
 (n) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$
 (o) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-4}{x-\sqrt{x}-2}$
 (p) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x^2+16}-5}{x^2-3x}$
 (q) $\lim_{x \rightarrow 0} \tan x$
 (r) $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin 2x + x^2 \cos 5x)$
 (s) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(t+x)^2 - t^2}{x}$
 (t) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(t+x) - \sin(t)}{x}$

Exercício 8. Calcule os seguintes limites assintóticos.

- (a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}$
 (b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 + \frac{100}{x} \right)$
 (c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x+3}{2x-7}$
 (d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2+x-5}{3x^2-7x+2}$
 (e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2+1}$
 (f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+2x+5}{x^3+7x^2+2x-1}$

Exercício 9. Calcule os seguintes limites:

- (a) $\lim_{x \rightarrow \pi/3} \frac{2 \sin x - \sqrt{3}}{3x - \pi}$
 (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - e^x) \sin x}{\ln(\cos^2 x)} c$
 (c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2^x - 4}{x - 2}$
 (d) $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sin x - \cos x}{4x - \pi}$
 (e) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^8 - 3^8}{x^2 - 9}$

(f) $\lim_{x \rightarrow \ln 2} \frac{e^x - 2}{x - \ln 2}$