Lista 2 de Cálculo para Funções de Várias Variáveis II (MAT2352)

Monitor: Renato Ghini Bettiol (renatobettiol@gmail.com)

3 de outubro de 2007

1 Parte I: Mudanças de Variáveis

Questão 1 (Guidorizzi[1], 34.2 ex 1 a,e e Extras)**.** *Calcule as seguintes integrais duplas, nas regiões $\Omega_i \subset \mathbb{R}^2$, usando mudanças de variáveis apropriadas:*

(i) $\int\int_{\Omega_1} (x^2 + 2y)dxdy$, *com* $\Omega_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$

(ii) $\int\int_{\Omega_2} e^{x^2+y^2} dxdy$, *com* $\Omega_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, -x \leq y \leq x, x \geq 0\}$

(iii) $\int\int_{\Omega_3} e^{\frac{y-x}{y+x}} dxdy$, *com* Ω_3 *o triângulo de vértices* $(0, 0), (0, 2), (2, 0)$

(iv) $\int\int_{\Omega_4} x^2 dxdy$, *com* $\Omega_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 \leq 1\}$

Questão 2. *Use integrais duplas e mudança de variáveis para determinar a área limitada pela elipse de semi-eixos* $a, b \in \mathbb{R}^*_+$.

Questão 3. *Considere* $I(r) = \int_{-r}^{r} e^{-t^2} dt$, *para* $r > 0$.

(i) *Demonstrar que* $I^2(r) = \int\int_R \psi(x, y)dxdy$, *onde* $R = [-r, r]\times[-r, r]$ *e* $\psi(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$. *(Dica: Reveja a Questão 7 (Parte II - Lista 1))*

(ii) *Calcule* $\tilde{I}^2(r) = \int\int_{D_r} \psi(x, y)dxdy$ *usando coordenadas polares, onde* $D_r = \{x^2+y^2 \leq r^2\}$.

(iii) *Como* $D_{r\sqrt{2}}$ *é o disco circunscrito a* R, *demonstrar que* $\tilde{I}^2(r) < I^2(r) < \tilde{I}^2(r\sqrt{2})$.

(iv) *Expressando as integrais do item (iii) em coordenadas polares e usando o item (ii), calcule* $\lim_{r\to\infty} \tilde{I}^2(r)$ *e conclua, por (iii), que* $\lim_{r\to\infty} I^2(r) = \lim_{r\to\infty} \tilde{I}^2(r)$. *Finalmente, obtenha* $\lim_{r\to\infty} I(r) = \sqrt{\pi}$.

(v) *Aplique o item (iv) para mostrar que* $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, *sendo* Γ *a função gamma*[2].

[1] GUIDORIZZI, H. L. Um curso de Cálculo (Vol 3). LTC, 1987. DEDALUS QA308 G948c

[2] A função gamma $\Gamma : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, dada por $\Gamma(t) = \int_0^\infty e^{-x} x^{t-1} dx$ é uma generalização do fatorial de números naturais.

Questão 4. *Calcular* $\int\int_R \frac{dxdy}{\sqrt{1+x+2y}}$, *onde* $R = [0,1] \times [0,1]$, *fazendo* $x = u, y = \frac{v}{2}$ *e encontrando* D, *tal que* R *é imagem de* D *por essa mudança de variáveis.*

Questão 5. *Use integrais duplas para calcular a área da região limitada pela curva* $r = 1+\sin\theta$.

Questão 6. *Usando coordenadas polares, encontre a área limitada pela lemniscata, cuja equação em coordenadas cartesianas é* $(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2), a > 0$.

2 Parte II: Integrais Triplas

Questão 7 (Apostol[3], 2.20 ex 1,3). *Calcule as seguintes integrais triplas nas regiões* $\Omega_i \subset \mathbb{R}^3$, *usando mudanças de variáveis, caso necessário.*

(i) $\int\int\int_{\Omega_1} xy^2z^3dxdydz$, *com* Ω_1 *o sólido limitado pela superfície* $z = xy$, *e pelos planos* $y = x, x = 1$ *e* $z = 0$

(ii) $\int\int\int_{\Omega_2} xyzdxdydz$, *com* $\Omega_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 1, x,y,z \geq 0\}$

(iii) $\int\int\int_{\Omega_3} ze^{x^2+y^2}dxdydz$, *com* Ω_3 *o cilindro determinado por* $x^2+y^2 \leq 4$ *e* $2 \leq z \leq 3$

Questão 8. *Seja* $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 1\} \subset \mathbb{R}^3$ *a bola unitária fechada. Calcular* $\int\int\int_B \frac{dxdydz}{\sqrt{2+x^2+y^2+z^2}}$ *através de uma mudança de coordenadas apropriada.*

Questão 9. *Use integrais triplas e mudança de variáveis para determinar o volume limitado pelo elipsóide de semi-eixos* $a, b, c \in \mathbb{R}^*_+$.

Questão 10. *Calcule* $\int\int\int_S \frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$, *onde* S *é o sólido limitado pelas esferas* $x^2+y^2+z^2 \leq a^2$ *e* $x^2+y^2+z^2 \leq b^2$, *com* $0 < b < a$.

Questão 11. *Sejam* ρ, θ, ϕ *as coordenadas esféricas de* $\mathbb{R}^3$ *e suponha que uma superfície que passa pela origem está dada por* $\rho = f(\theta, \phi)$, *onde* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *é contínua. Mostre que o volume embaixo da superfície é* $V = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(f(\theta,\phi))^3 \sin\phi d\phi d\theta$.

Questão 12. *Considere* $f : [a,b] \to \mathbb{R}^*_+$ *uma função contínua positiva. Utilize uma mudança de variáveis adequada nas coordenadas de* $\mathbb{R}^3$ *para deduzir que o volume limitado pela rotação do gráfico de* f *em torno do eixo* Ox, *com* $a \leq x \leq b$ *(sólido de revolução), é* $V_x = \pi\int_a^b(f(x))^2dx$, *e analogamente para a rotação em torno do eixo* Oy. *(Dica: Para obter* V_x, *utilize coordenadas polares em* (y,z) *e preserve* x*)*

[3]APOSTOL, T. M. Calculus (Vol 2) - Calculus of several variables with applications to probability and vector analysis. Blaisdell Publishing, 1965. DEDALUS QA308 A645c