MAT 4903-2 Geometria Lorentziana Global

Paolo Piccione, Setembro 2006

Lista de Exercícios 2

(1) Seja (M, g) uma variedade Lorentziana , $p \in M$ e $\beta : [a, b] \to T_pM$ uma curva suave por partes com imagem contida no domínio da $\exp_p$ e tal que $\gamma = \exp_p \circ \beta$ seja uma curva de tipo tempo em M. Prove que β tem imagem contida num síngolo cone-tempo de T_pM. (*Sug.: use o Lema de Gauss*)

(2) Seja U uma vizinhança normal de $p \in M$, e seja $q \in U$ tal que existe uma curva de tipo tempo ligando p e q. Prove que a geodésica radial de p a q é a única curva que maximiza o comprimento entre todas as curvas em U ligando p e q. (*Sug.: veja texto do O'Neill, Capítulo 5*)

(3) Mostre que em qualquer espaço-tempo, a função $p \mapsto I^+(p)$ (função que toma valores na família dos conjuntos abertos de M) é *interiormente contínua*, i.e., para todo $p \in M$ e para todo compacto $K \subseteq I^+(p)$ existe uma vizinhança U de p em M tal que $K \subseteq I^+(q)$ para todo $q \in U$. (*Sug.: use o fato que a relação $\ll$ é aberta. O fato é provado em Hawking–Sachs, Communications in Mathematical Physics 1974, p. 291!!*)

(4) Prove que o conjunto:

$$A = \big\{p \in M : \ (M, g) \text{ é fortemente causal em } p\big\}$$

é aberto em M.

(5) Seja (M, g) fortemente causal. Prove que (M, g) é "distinguishing".