MAT 103 — COMPLEMENTOS DE MATEMÁTICA PARA CONTABILIDADE E ADMINISTRAÇÃO

LISTA DE EXERCÍCIOS 1

Exercício 1. Determine os subconjuntos de $\mathbb{R}$ onde as expressões abaixo são estritamente positivas, estritamente negativas e iguais a zero, ou seja, dada uma expressão $p(x)$ determine para quais valores de x tem-se $p(x) > 0$, para quais $p(x) < 0$, e finalmente para quais $p(x) = 0$.

(a) $-5x + 1$
(b) $-3x^2 + 11x + 4$
(c) $x^2 + 6x + 13$
(d) $-x^2 + 4x - 4$

Nos itens seguintes, antes de determinar as regiões positivas, negativas e nulas, determine para qual subconjunto de $\mathbb{R}$ as expressões estão definidas.

(e) $\dfrac{x^2 + x - 6}{2x + 1}$
(f) $\dfrac{5x^3 + 3x^2 - 2x}{x^2 + 2x + 17}$
(g) $\dfrac{x^2 - x - 2}{2x^2 + 9x + 7}$
(h) $\dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 6x + 8}|x - 5|$

Exercício 2. Determine para quais valores de $x \in \mathbb{R}$ valem as desigualdades abaixo (no item (g) determine onde a expressão está definida).

(a) $|-7x + 4| \geq 5$
(b) $1 < |5x - 9| \leq 9$
(c) $|x^2 + 6x + 4| > 2$
(d) $3 \leq |x^2 + 2x + 3| \leq 4$
(e) $0 < |x - 5|(x + 1) \leq 3$
(f) $|x^2 + 4x + 1| \leq 3x + 6$
(g) $\left|\dfrac{x^2 - 2x + 6}{x - 1}\right| \leq x + 5$

Date: 31 de Março de 2008.

Exercício 3. Sejam $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ e $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ Definamos que $a^n = a \cdot a \cdot a \cdots a$, n vezes, ou seja, a^n é igual ao produto de a por ele mesmo n vezes. Mostre as igualdades abaixo, onde $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $b > 0$ e, m e n são números naturais, ou seja, $m, n \in \mathbb{N}$, com $m > n$.

(a) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
(a) $a^m / a^n = a^{m-n}$
(a) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
(a) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Exercício 4. Sejam $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $n \in \mathbb{Z}$. Se $n > 0$ definamos a^n como anteriormente, se $n = 0$ definamos $a^n = 1$ e se $n < 0$ então definamos $a^n = (1/a)^{|n|}$. Mostre as igualdades do exercício anterior supondo agora que $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $b > 0$ e, m e n são números inteiros, ou seja, $m, n \in \mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

Exercício 5. Sejam $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $p, q \in \mathbb{N}$, $q \neq 0$, definamos $a^{1/q} = \sqrt[q]{a}$, ou seja, $a^{1/q}$ é a q-ésima raiz real positiva de a. Mostre que $(a^{1/q})^p = (a^p)^{1/q}$. Definamos então $a^{p/q} = (a^p)^{1/q}$ para $p, q \in \mathbb{N}$, $q \neq 0$. No caso geral $p/q \in \mathbb{Q} = \{r/s | r, s \in \mathbb{Z}, s \neq 0\}$ definamos da seguinte forma, se $p/q > 0$ então $a^{p/q} = a^{|p|/|q|}$, se $m/n = 0$ então $a^{m/n} = 1$ e se $m/n < 0$ então $a^{m/n} = (1/a)^{|m|/|n|}$. Mostre as igualdades do exercício 3 supondo agora que $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $b > 0$ e, m e n são números racionais, ou seja, $m, n \in \mathbb{Q}$.

Exercício 6. Determine o domínio das funções abaixo:

(a) $f(x) = \log_2 \left(x^2 - 3x + 1\right)$
(b) $f(x) = \frac{\sqrt{\log_5 x + 1}}{3 - \log_3 x}$
(c) $f(x) = 10^{\frac{3x-1}{2-x}}$
(d) $(1 - x^2)^{\log_{2/3} x}$

Exercício 7. Determine as funções compostas $f \circ g$ e $g \circ f$ e seus domínios:

(a) $f(x) = 3x - 2, \quad g(x) = 2^x$
(b) $f(x) = \log_2(x + 1), \quad g(x) = 3^{x-1}$
(c) $f(x) = \sqrt{x - 1}, \quad g(x) = 1 - 10^x$
(d) $f(x) = 2^{x^2+2x+1}, \quad g(x) = \sqrt{\log_2 x} - 1$.