Lista de Exercícios I

March 31, 2012

1. Prove que as funções $f : [a, b] \to [c, d]$ dadas admitem inversa e calcule f^{-1}:

   (a) $f : [-\pi, -\frac{\pi}{2}] \to [-2, 0]$, $f(x) = 2 \sin x$

   (b) $f : [1, +\infty) \to [1, +\infty)$, $f(x) = x^2 - 2x + 2$

   (c) $f : [2, +\infty) \to [0, +\infty)$, $f(x) = \sqrt{2} \log (2x - 3)$

   (d) $f : [0, -\pi] \to [\frac{1}{e}, e]$, $f(x) = e^{\cos x}$

2. Determine o conjunto solução das seguintes inequações, ou seja, os valores de x para os quais as desigualdades são satisfeitas:

   (a) $\frac{1-x}{x^2+x+2} \geq 1$

   (b) $|2x - 4| + |8 - 3x| < 3$

   (c) $2 < |x - 1| < 4$

   (d) $(x^2 - 9x - 10)(x^2 - 4x + 4) \leq 0$

   (e) $\frac{3x}{x^2-4} < -1$

   (f) $\frac{\left(x^2+2x-3\right)\left(x^2+5x+6\right)}{-3x-6} \geq 0$

3. Determine o domínio das seguintes funções e, quando possível, calcule as funções compostas $f \circ g$ e $g \circ f$:

   (a) $f(x) = \cos (2x + 3)$, $g(x) = 1-x^2$

   (b) $f(x) = x^3-2x + 1$, $g(x) = x^{2010}$

   (c) $f(x) = \log(x-1)$, $g(x) = 2^x$

   (d) $f(x) = \sqrt[4]{x}$, $g(x) = 1-x^4$

4. Seja A um conjunto não-vazio. Prove que toda função $f : A \to \mathbb{R}$ pode ser escrita como a soma $f = f^+ + f^-$, onde $f^+ : A \to \mathbb{R}$ satisfaz $f^+(x) \geq 0$ e $f^- : A \to \mathbb{R}$ satisfaz $f^-(x) \leq 0$ para todo $x \in A$. *Sugestão:* Use a idéia de *máximo* e *mínimo* para comparar duas funções.

5. Prove que toda funcao $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pode ser escrita como a soma $f = f^+ + f^-$, onde $f^+ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é par, i.e. $f^+(-x) = f^+(x)$ e $f^-(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é ímpar, ou seja, $f^-(-x) = -f^-(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. *Sugestão:* Considere as funções $f(x) + f(-x)$ e $f(x) - f(-x)$.

6. Verdadeiro ou falso? (Procure justificar, mesmo que intuitivamente)

   (a) A soma de duas funcões crescentes é crescente;

   (b) Se f e g são funções crescentes, entao $f \circ g$ é crescente (onde for definida);

   (c) Se $f \geq 0$ e $g \leq 0$, então $f \circ g \leq 0$;

   (d) Se f e g são sobrejetivas, então $f \circ g$ é sobrejetiva;

   (e) Se f e g são injetivas, então $f \circ g$ é injetiva;

   (f) Se f é par e g é ímpar, então $f \cdot g$ é ímpar.

7. Resolva as equações, com $x \in \mathbb{R}$:

   (a) $5\,(\cos x)^2 - 3\,(\cos x) + \frac{2}{5} = 0$

   (b) $\sin^4 x - 3\sin^2 x + 2 = 0$

   (c) $4\cos^2 x + 2\left(1 + \sqrt{3}\right)\sin x = 4 + \sqrt{3}$

   (d) $[\log(x-4)]^2 + 2\log 9 \log(x-4) = \log^2 3 + \log^2 9$

   (e) $e^{\cos x + \sin x} - \left(\frac{1}{e}\right)^{\cos x - \sin x} = 0$