Lista 1 de Cálculo para Funções de Várias Variáveis II (MAT2352)

Monitor: Renato Ghini Bettiol (renatobettiol@gmail.com)

Pequenas correções em 20/09/2007

1 Parte I: Divergente e Rotacional de campos do $\mathbb{R}^3$

Questão 1 (Apostol[1], 5.21 ex 1 c,d,e). *Calcular o divergente ($\nabla.$) e o rotacional ($\nabla\times$) dos seguintes campos vetoriais de classe C^1:*

(i) $F(x,y,z) = (z+\sin y)\vec{i} - (z - x\cos y)\vec{j}$

(ii) $G(x,y,z) = e^{xy}\vec{i} + \cos xy\vec{j} + \cos xz^2\vec{k}$

(iii) $H(x,y,z) = (x^2\sin y, y^2\sin xz, xy\sin(\cos z))$

Questão 2 (Apostol, 5.21 ex 2,3,4). *Sejam $\vec{r}(x,y,z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, r = ||\vec{r}||$ e $\vec{v} = (x_0, y_0, z_0)$.*

(a) *Calcule $\nabla \times (\varphi(r)\vec{r})$, onde $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é um campo escalar de classe C^1.*

(b) *Mostre que $\nabla \times (\vec{v} \times \vec{r}) = 2\vec{v}$.*

(c) *Calcule todos os valores de $n \in \mathbb{Z}$ tais que $\nabla.(r^n\vec{r}) = 0$.*

Questão 3 (Apostol, 5.21 ex 9). *Uma condição necessária e suficiente para que $F : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ seja um gradiente, i.e. $\exists\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, C^1, \nabla\varphi = F$ é $\nabla \times F = 0$. Todavia, pode existir um campo escalar não-nulo $\mu : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, tal que $\mu F = \nabla\varphi$ para algum $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, C^1$. Mostre que se existe tal campo escalar μ, F é sempre ortogonal a seu rotacional, i.e. $\langle F(x,y,z), \nabla \times F(x,y,z)\rangle = 0, \forall(x,y,z) \in U$.*

OBS: No caso bidimensional $F = P\vec{i} + Q\vec{j}$, isso garante condição necessária para que a Equação Diferencial Ordinária (EDO) $Pdx + Qdy = 0$ admita um fator integrante μ, i.e., tal que $\mu Pdx + \mu Qdy = 0$ seja uma EDO exata. Nesse caso, pode-se reconstruir o campo $F = (F_1, F_2)$, onde $\frac{\partial F_1}{\partial x} = \mu P, \frac{\partial F_2}{\partial y} = \mu Q$, e as soluções da EDO serão dadas implicitamente pela equação $F(x, y(x)) = c \in \mathbb{R}$.

[1] APOSTOL, T. M. Calculus (Vol 2) - Calculus of several variables with applications to probability and vector analysis. Blaisdell Publishing, 1965. DEDALUS QA308 A645c

Extra 1 (Resolução de uma EDO com fator integrante). *Uma solução da EDO* $F_1(x,y)dx + F_2(x,y)dy = 0$ *é uma função* $y = y(x)$*, tal que* $\frac{dy}{dx} = -\frac{F_1(x,y)}{F_2(x,y)}$*. Considere* $F_1(x,y) = y, F_2(x,y) = x^2y - x$*, correspondendo à EDO* $ydx + (x^2y - x)dy = 0$*. Então, para resolver tal EDO, siga os itens abaixo:*

(a) Considerando F_1, F_2 *como acima, seja* $F = (F_1, F_2)$ *campo vetorial do* $\mathbb{R}^2$*. Verifique que* $\nabla \times F \neq 0$*, i.e. que a EDO acima não é exata.*

(b) Calcule $\mu(x) = ke^{\int \phi(x)dx}$*, onde* $\phi(x) = \frac{\frac{\partial F_1}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial x}}{F_2}$ *e verifique que* μ *é fator integrante da EDO, i.e., que* $\nabla \times \mu F = 0$*.*

(c) Encontre explicitamente $\psi(x,y)$*, tal que* $\frac{\partial \psi}{\partial x} = F_1, \frac{\partial \psi}{\partial y} = F_2$*. (Dica: Faça* $\psi(x,y) = \int \mu F_1(x,y)dx + f(y)$ *e ache* $f(y)$ *derivando em relação a* y*, i.e., impondo* $\frac{\partial \psi}{\partial y} = \mu F_2$*).*

(d) As soluções $y = y(x)$ *da EDO estão determinadas implicitamente nas equações* $\psi(x,y) = c \in \mathbb{R}$*. Para* $c = 0$*, encontre explicitamente* $y(x)$ *e verifique que soluciona a EDO.*

Questão 4. *Demonstre ao menos duas das seguintes identidades, para* $F, G : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \varphi : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *de classe* C^2*.*

(i) $\nabla \times \varphi F = \nabla\varphi \times F + \varphi\nabla \times F$

(ii) $\nabla \times (F \times G) = G \times (\nabla \times F) - F \times (\nabla \times G)$

(iii) $\nabla \cdot (\nabla \times F) = 0$

(iv) $\nabla \times (\nabla \times F) = \nabla(\nabla \cdot F) - \nabla^2 F$*, onde* $\nabla^2 F = (\nabla^2 F_1, \nabla^2 F_2, \nabla^2 F_3), \nabla^2 F_i = \frac{\partial^2 F_i}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 F_i}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 F_i}{\partial^2 z}$

Note que é necessário que F *seja de classe* C^2 *para que* $\frac{\partial^2 F_i}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^2 F_i}{\partial x_k \partial x_j}$*.*

Questão 5. *Calcule o laplaciano* (∇^2) *de*

(i) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \varphi(x,y) = \frac{1}{4}e^{x^2 - y^2}$

(ii) $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \psi(x,y,z) = \sin x + z \cos y$

(iii) $\xi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}, \xi(x,y,z,w) = x^2y^2 + z^3w^3$

(iv) $\varsigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \varsigma(x) = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^n x_i^3$*, onde* $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$

OBS: Pode-se definir o laplaciano $\nabla^2\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *para* $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *de classe* C^2 *como o divergente do seu gradiente, i.e.*

$$\nabla^2\varphi = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2}$$

2 Parte II: Integrais Duplas

Questão 6 (Guidorizzi[2], 33.6 ex 1 h,i,l). *Seja* $A = [1,2] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$. *Verifique as hipóteses do Teorema de Fubini e calcule* $\iint_A f(x,y)dxdy$ *para as seguintes funções:*

(i) $f_1(x,y) = \frac{1}{(x+y)^2}$

(ii) $f_2(x,y) = ye^{xy}$

(iii) $f_3(x,y) = x \sin \pi y$

Questão 7 (Guidorizzi, 33.6 ex 2). *Sejam* $f : [a,b] \to \mathbb{R}, g : [c,d] \to \mathbb{R}$ *funções contínuas. Prove que, sendo* $A = [a,b] \times [c,d]$, *tem-se*

$$\iint_A f(x)g(y)dxdy = \Big(\int_a^b f(x)dx \Big) \Big(\int_c^d g(y)dy \Big)$$

Questão 8 (Apostol, 2.9 ex 1,3,6). *Calcule as seguintes integrais dulas nos retângulos:*

(i) $\iint_R xy(x+y)dxdy, R = [0,1] \times [0,1]$

(ii) $\iint_R \sin^2 x \sin^2 y dxdy, R = [0,\pi] \times [0,\pi]$

(iii) $\iint_R y^{-3} e^{\frac{tx}{y}} dxdy, R = [0,t] \times [1,t]$

Questão 9 (Apostol, 2.13 ex 1,3,5). *Calcule as seguintes integrais duplas nas regiões* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, *com* $\partial\Omega$ *de conteúdo nulo:*

(i) $\iint_\Omega x\cos(x+y)dxdy$, Ω *o triângulo de vértices* $(0,0), (\pi,0), (\pi,\pi)$

(ii) $\iint_\Omega e^{x+y}dxdy, \Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$

(iii) $\iint_\Omega (x^2 - y^2)dxdy, \Omega \subset \mathbb{R}^2$ *limitada por* $y = \sin x$ *e o intervalo* $[0,\pi]$ *no eixo* Ox

Questão 10 (Apostol, 2.13 ex 10,12,17,18; Guidorizzi, 33.6 ex 7 d,f,s). *Considere* $f : S \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *Riemann-Integrável nas regiões* S *indicadas. Inverta a ordem de integração:*

(i) $\int_0^2 \int_{y^2}^{2y} f(x,y)dxdy$

(ii) $\int_1^2 \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dydx$

(iii) $\int_0^\pi \int_{-\sin\frac{x}{2}}^{\sin x} f(x,y)dydx$

(iv) $\int_0^4 \int_{-\sqrt{4-y}}^{\frac{y-4}{2}} f(x,y)dxdy$

(v) $\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dydx$

[2]GUIDORIZZI, H. L. Um curso de Cálculo (Vol 3). LTC, 1987. DEDALUS QA308 G948c

(vi) $\int_0^3 \int_{x^2-2x}^{\sqrt{3x}} f(x,y)dydx$

(vii) $\int_1^e \int_{\ln x}^{x} f(x,y)dydx$

Questão 11 (Guidorizzi, 33.6 ex 9 c,d). *Calcule a área dos subconjuntos do* $\mathbb{R}^2$ *abaixo, usando integrais duplas:*

(i) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \leq 2, x \leq y \leq x+1, x \geq 0\}$

(ii) $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^3 \leq y \leq \sqrt{x}\}$

Questão 12 (Apostol, 2.13 ex 8). *Calcule os volumes dos sólidos entre* $S_i \subset \mathbb{R}^2$ *e as superfícies* $z = f_i(x,y)$ *nos casos*

(i) $f_1(x,y) = x^2 + y^2, S_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1, |y| < 1\}$

(ii) $f_2(x,y) = 3x + y, S_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + 9y^2 \leq 36, x, y > 0\}$

(iii) $f_3(x,y) = y + 2x + 20, , S_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 16\}$

Questão 13 (Apostol, 2.15 ex 1,2,4). *Determinar o centróide*[3] $(\overline{x}, \overline{y})$ *das regiões limitadas pelas curvas abaixo:*

(i) $y = x^2, x + y = 2$

(ii) $y^2 = x + 3, y^2 = 5 - x$

(iii) $y = \sin x, y = 0, 0 \leq x \leq \pi$

[3] **Definição (Centróide):** O centróide da região $S \subset \mathbb{R}^2$ corresponde ao centro de massa da região com densidade constante, i.e.,

$$(\overline{x}, \overline{y}) = \left(\frac{\iint_S x dxdy}{\iint_S dxdy}, \frac{\iint_S y dxdy}{\iint_S dxdy} \right)$$

Mais geralmente, o centróide de uma região $A \subset \mathbb{R}^n$ é dado por $(\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_n}) \in \mathbb{R}^n, \overline{x_i} = \frac{\int_A x_i dx_1 ... dx_n}{\int_A dx_1 ... dx_n}$