MAT 2351 – Cálculo para Funções de Várias Variáveis I

Prof. Paolo Piccione

Lista de Exercícios 2

(1) Determine todas as funções $f : I\!R^2 \to I\!R$ tais que:

(a) $\frac{\partial f}{\partial x} = 9x^2y^2 - 10x$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 6x^3y + 1$

(b) $\frac{\partial f}{\partial x} = y\cos(xy) + 3x^2 - y$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x\cos(xy) - x + 3y^2$

(c) $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xe^{x^2+y^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2ye^{x^2+y^2} + \frac{1}{1+y^2}$

(2) Determine uma função $f : I\!R^2 \to I\!R$ cujo gráfico passa pelo ponto $(0,0,2)$ e tal que:

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{x}{1+x^2+y^2}, \frac{y}{1+x^2+y^2} + ye^{y^2}\right).$$

(3) Determine o polinômio de Taylor de ordem 2 da função dada, centrado no ponto (x_0, y_0) dado:

(a) $f(x,y) = e^{x+5y}$, $(x_0,y_0) = (0,0)$;

(b) $f(x,y) = x^3 + y^3 - x^2 + 4y$, $(x_0,y_0) = (1,1)$;

(c) $f(x,y) = \sin(3x+4y)$, $(x_0,y_0) = (0,0)$.

(3) Determine o máximo e o mínimo da função $f(x,y) = 2x - y$ no conjunto:

$$A = \big\{(x,y \in I\!R^2 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y \leq 3,\ y \geq x\big\}.$$

(4) Determine os pontos críticos das funções abaixo:

(a) $f(x,y) = 2x^2 + y^2 - 2xy + x - y$

(b) $f(x,y) = x^2 - y^2 + 3xy - x + y$

(c) $f(x,y) = x^3 - y^2 + xy - 5$

(d) $f(x,y) = x^3 + y^3 - xy$

(e) $f(x,y) = x^4 + y^4 + 4x + 4y$

(f) $f(x,y) = x^5 + y^5 - 5x - 5y$.

(5) Deseja-se construir uma caixa, sem tampa, com a forma de um paralelepípedo retângulo e com 1 mq de volume. O material a ser utilizado nas laterais custa o triplo do que será utilizado no fundo. Determine as dimensões da caixa que minimiza o custo do material.

(6) Estude com relação a máximos e mínimos locais as funções abaixo:

(a) $f(x, y) = x^2 + 3xy + 4y^2 - 6x + 2y$
(b) $f(x, y) = x^2 + y^3 + xy - 3x - 4y + 5$
(c) $f(x, y) = x^3 + 2xy + y^2 - 5x$
(d) $f(x, y) = -x^2 + y^2 + 2xy + 4x - 2y$
(e) $f(x, y) = x^3 - 3x^2y + 27y$
(f) $f(x, y) = x^2 - 4xy + 4y^2 - x + 3y + 1$
(g) $f(x, y) = (x^2 + 2xy + 4y^2 - 6x - 12y)^{\frac{1}{3}}$
(h) $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2$
(i) $f(x, y) = x^4 + xy + y^2 - 6x - 5y$
(j) $f(x, y) = x^4 + y^4 + 4x + 4y$

(6) Determine o máximo e o mínimo da função $f(x, y)$ dada no conjunto A:

(a) $f(x, y) = 3x - y$,

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ y - x \leq 3,\ x + y \leq 4,\ 3x + y \leq 6\}$$

(b) $f(x, y) = x^2 + 3xy - 3x$, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 1\}$
(c) $f(x, y) = xy$, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ 2x + y \leq 5\}$
(d) $f(x, y) = y^2 - x^2$, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$
(e) $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y^2$, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$
(f) $f(x, y) = 2x + y$, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 \leq 1\}$
(g) $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ y \geq x,\ 2y + x \leq 4\}$

(7) Dê um exemplo de uma função contínua num conjunto limitado que não admita máximo. Mostre um exemplo de função contínua num conjunto fechado que não admite mínimo.

(8) Uma empresa produz dois produtos, cujas quantidades são indicadas por x e y. Tais produtos são oferecidos ao mnercado por um preço de p_1 e p_2 respectivamente; a dependência de p_1 e p_2 como funções de x e y é dada por :$p_1 = 120 - 2x$, $p_2 = 200 - y$. O custo total da empresa para produzir e vender quantidades x e y dos produtos é dado por $C(x, y) = x^2 + 2y^2 + 2xy$. Admitindo que toda a produção da empresa será absorbida pelo mercado, determine a produção que maximiza o lucro.