Espaços de Sobolev em $\mathbb{R}^n$

Heydy M. Santos Damian   Marcela Nascimento

Novembro de 2019

1 Introdução

Introduziremos com alguns conceitos básicos necessários durante todo o assunto abordado.

Definição 1. *Um vetor da forma $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n)$ onde cada componente γ_i é um número inteiro não-negativo é chamado de* ***multi-índice de ordem*** $|\gamma| = \gamma_1 + \cdots + \gamma_n$.

Definição 2. *Seja $u : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Dado um multi-índice γ definimos a* ***derivada parcial*** *da função u como sendo*

$$D^\gamma u(x) = \frac{\partial^{|\gamma|} u}{\partial x_1^{\gamma_1} \cdots \partial x_n^{\gamma_n}}(x).$$

Definição 3. *Sejam U,V subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, dizemos que V está* ***compactamente contido*** *em U, e escrevemos*

$$V \subset\subset U,$$

se $V \subset K \subset U$, para algum $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto.

2 Espaços de Hölder

Consideremos $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e $0 < \gamma \leq 1$. Já conhecemos a classe de funções contínuas de Lipschitz $u : U \longrightarrow \mathbb{R}$, que por definição satisfazem

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x - y|, \ (x, y \in U), \tag{1}$$

para alguma constante C. Agora, consideraremos também uma classe de funções u que satisfazem uma variante de (1)

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x - y|^\gamma, \ (x, y \in U) \tag{2}$$

para alguma constante C. Essas funções são chamadas **Contínuas de Hölder com expoente** γ. Denotaremos por $C^\gamma(U)$ o espaço de todas as funções contínuas de Hölder.

Definição 4. *Seja $u : U \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função. Para todo $k \geq 0$ inteiro, definimos o espaço das funções k vezes diferenciáveis como sendo*

$$C^k(\overline{U}) = \{u \in C^k(U) : D^\gamma u \text{ é limitada e uniformemente contínua em } U, \\ \forall |\gamma| \leq k\},$$

dotado da norma

$$||u||_{C^k(\overline{U})} = \max_{|\alpha| \leq k} ||D^\alpha u||_{L^\infty(U)}.$$

Definição 5. *A **γ-ésima seminorma de Hölder** de $u : U \longrightarrow \mathbb{R}$ é dada por*

$$[u]_{C^{0,\gamma}(\overline{U})} = \sup_{x,y \in U; x \neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\gamma}, \tag{3}$$

*e a **γ-ésima norma de Hölder** é*

$$\|u\|_{C^{0,\gamma}(\overline{U})} = \|u\|_{C(\overline{U})} + [u]_{C^{0,\gamma}(\overline{U})}. \tag{4}$$

Definição 6. *Para $k > 0$ inteiro definimos o **espaço de Hölder***

$$C^{k,\gamma}(\overline{U}) = \{u \in C^k(\overline{U}) : D^\alpha u \in C^\gamma(U), \, \forall |\alpha| \leq k\},$$

dotado da norma

$$\|u\|_{C^{k,\gamma}(\overline{U})} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(U)} + \sum_{|\alpha| = k} [D^\alpha u]_{C^{0,\gamma}(\overline{U})}. \tag{5}$$

Então, o espaço $C^{k,\gamma}(\overline{U})$ consiste nessas funções u que são k vezes contínuas, diferenciáveis e cujas k-ésimas derivadas parciais são Hölder contínuas com expoente γ. Tais funções são bem comportadas e, além disso, o próprio espaço $C^{k,\gamma}(\overline{U})$ possui uma boa estrutura matemática.

Teorema 7. *O espaço das funções $C^{k,\gamma}(\overline{U})$ é um espaço de Banach.*

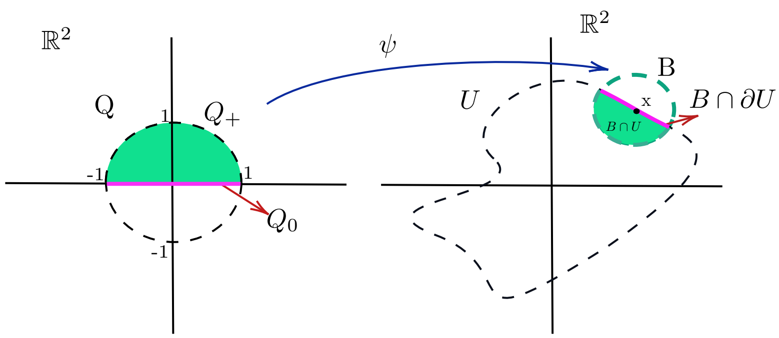
A demonstração do resultado acima encontra-se em [[3], Teorema 5.1]

Definição 8. *Dado $x \in \mathbb{R}^n$, podemos escrever $x = (x', x_n)$ com $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$. Definimos*

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n_+ &= \{x : x_n > 0\}; \\ Q &= \{x : \|x\| < 1\}; \\ Q_+ &= Q \cap \mathbb{R}^n_+; \\ Q_0 &= \{x : x_n = 0, \|x\| < 1\}. \end{aligned}$$

Dizemos que um domínio limitado $U \subset \mathbb{R}^n$ é de classe C^1, se para todo $x \in \partial U$, existe uma bola $B = B(x)$ em $\mathbb{R}^n$ e uma aplicação bijetiva $\psi : Q \longrightarrow B$ tal que

$$\psi \in C^1(\overline{Q}), \psi^{-1} \in C^1(\overline{B}), \psi^{-1}(U \cap B) \subset Q_+ \text{ e } \psi^{-1}(B \cap \partial U) \subset Q_0.$$



Definição 9. *Se $\psi \in C^{k,\gamma}(\overline{Q})$ e $\psi^{-1} \in C^{k,\gamma}(\overline{B})$, $0 < \gamma \leq 1$, dizemos que U é de classe $C^{k,\gamma}$. Em particular, se $\psi \in C^{0,1}(\overline{Q})$ e $\psi^{-1} \in C^{0,1}(\overline{B})$ dizemos que U é um aberto Lipschitz.*

3 Os Espaços de Sobolev

O Espaço de Hölder introduzido na seção anterior, muitas vezes, não possui configurações adequadas para a teoria elementar de equações diferenciais parciais, o que torna necessário outros tipos de espaços contendo funções menos suaves. Iniciaremos enfraquecendo substancialmente a definição de derivadas parciais. Vamos considerar $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto.
Notação: Seja $C_c^\infty(U)$ o espaço das funções infinitamente diferenciáveis $\phi : U \longrightarrow \mathbb{R}$, com suporte compacto em U. Chamaremos uma função ϕ pertencente a $C_c^\infty(U)$ de **função teste**.

Definição 10. *Sejam $u, v \in L^1_{loc}(U)$, e α um multi-índice. Dizemos que v é a α^{th} derivada fraca de u, e escrevemos*

$$D^\alpha u = v, \tag{6}$$

quando

$$\int_U u D^\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U v \phi dx \tag{7}$$

para toda função teste $\phi \in C_c^\infty(U)$.

Exemplo 11. *Considere $n = 1$, $U = (0, 2)$ e $u(x) = \begin{cases} x, \ se & 0 < x \leq 1 \\ 1, \ se & 1 < x < 2 \end{cases}$.*

Definindo $v(x) = \begin{cases} 1, \ se & 0 < x \leq 1 \\ 0, \ se & 1 < x < 2 \end{cases}$ teremos $u' = v$ no sentido fraco.
De fato, para qualquer $\phi \in C_c^\infty(U)$ temos:

$$\int_0^2 u\phi' dx = \int_0^1 x\phi' dx + \int_1^2 \phi' dx = x\phi \mid_0^1 - \int_0^1 \phi dx + \phi(2) - \phi(1) =$$

$$= \phi(1) - \int_0^1 \phi dx + \phi(2) - \phi(1) = - \int_0^1 \phi dx = - \int_0^2 v\phi dx$$

Exemplo 12. *Considerando* $n = 1$ *e* $U = (0, 2)$, *a função* $u(x) = \begin{cases} x, & se \quad 0 < x \leq 1 \\ 2, & se \quad 1 < x < 2 \end{cases}$ *não possui derivada de ordem 1 no sentido fraco. Para verificarmos isso devemos mostrar que não existe nenhuma função* $v \in L^1_{loc}(U)$ *satisfazendo*

$$\int_0^2 u\phi' dx = -\int_0^2 v\phi dx \tag{8}$$

para toda $\phi \in C_c^\infty(U)$. *Suponha, por contradição, que* (8) *seja válido para algum* v *e todo* ϕ. *Então*

$$-\int_0^2 v\phi dx = \int_0^2 u\phi' dx = \int_0^1 x\phi' dx + 2\int_1^2 \phi' dx = -\int_0^1 \phi dx - \phi(1). \tag{9}$$

Tomemos uma sequência $(\phi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ *de funções suaves satisfazendo*

$$0 \leq \phi_m \leq 1;\ \phi_m(1) = 1;\ \phi_m \longrightarrow 0\ \forall x \neq 1.$$

Substituindo ϕ *por* ϕ_m *em* (9) *e fazendo* $m \longrightarrow \infty$ *obtemos*

$$1 = \lim_{m\to\infty} \phi_m(1) = \lim_{m\to\infty} [\int_0^2 v\phi_m dx - \int_0^1 \phi_m dx] = 0.$$

Portanto, u *não possui primeira derivada no sentido fraco.*

Seja $1 \leq p \leq \infty$ e seja $k \geq 0$ inteiro. Definimos agora determinados espaços de funções, cujos membros tem derivadas fracas de várias ordens em vários espaços L^p.

Definição 13. *O espaço de Sobolev* $W^{k,p}(U)$ *consiste de todas as funções* $u : U \longrightarrow \mathbb{R}$, *de modo que, para cada multi-índice* α *com* $|\alpha| \leq$, $D^\alpha u$ *existe no sentido fraco e pertence a* $L^p(U)$. *Podemos escrevê-lo da seguinte forma:*

$$W^{k,p}(U) = \{u \in L^p(U); D^\alpha u \in L^p(U) \text{ para todo } |\alpha| \leq k\}.$$

Esses espaços, são espaços normados munidos da seguinte norma:

$$\|u\|_{W^{k,p}(U)} = \sum_{|\alpha|\leq k} \left(\int_U |D^\alpha u|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(U)}.$$

Observações:

- Note que $W^{0,p}(U) = L^p(U)$;
- Para $p = 2$, a norma anteriormente definida é induzida pelo produto interno
$$\langle u, v\rangle = \sum_{|\alpha|\leq k} \int_U D^\alpha u(x) D^\alpha v(x) dx;$$

- $W^{k,2}$ é um espaço de Hilbert e o denotamos por

$$H^k(U) = W^{k,2}(U);$$

- Definimos $W_0^{k,p}(U) = \overline{C_c^\infty(U)}$. Em particular $W_0^{k,p}(\mathbb{R}^n) = W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$.

Vejamos agora algumas propriedades das derivadas fracas e dos espaços de Sobolev. A demonstração dessas propriedades encontra-se em [[3], Teorema 5.3.2.1 e Teorema 5.3.2.2].

Teorema 14. *Suponhamos $u, v \in W^{k,p}(U)$, $|\alpha| \leq k$. Então:*

1. *$D^\beta(D^\alpha u) = D^\alpha(D^\beta u) = D^{\alpha+\beta}u$ para todos os multi-índices α, β com $|\alpha|+|\beta| \leq k$ e $D^\alpha u \in W^{k-|\alpha|,p}(U)$;*
2. *Para cada $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $D^\alpha(\lambda u + \mu v) = \lambda D^\alpha u + \mu D^\alpha v$, $|\alpha| \leq k$ e $\lambda u + \mu v \in W^{k,p}(U)$;*
3. *Se V é um subconjunto aberto de U, então $u \in W^{k,p}(V)$;*
4. *Se $\xi \in C_c^\infty(U)$, então $\xi u \in W^{k,p}(U)$ e $D^\alpha(\xi u) = \sum_{\beta \leq \alpha} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} D^\beta \xi D^{\alpha-\beta} u$,*

   onde $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{\alpha!}{(\alpha-\beta)!\beta!}$

Teorema 15. *Para todo k inteiro positivo e $1 \leq p \leq \infty$, $W^{k,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach.*

4 Resultados Prévios

Nosso objetivo principal é apresentar e demonstrar os teoremas de imersões contínuas e compactas dos espaços de Sobolev. Para isso, necessitaremos de alguns resultados que enunciaremos nesta seção. As demonstrações desses resultados encontram-se em [2].

Definição 16. *Seja E um subespaço de um espaço normado F. Seja*

$$i : E \to F,$$

a aplicação inclusão. Se existe $C > 0$ tal que

$$||x||_F \leq C||x||_E,$$

*ou seja, se i for contínua, dizemos que a inclusão $E \subseteq F$ é uma **imersão contínua**. Denotamos isto por:*

$$E \hookrightarrow F.$$

Definição 17. *Uma imersão $E \hookrightarrow F$ é* ***compacta****, se toda sequência limitada em E possui uma subsequência convergente em F. Denotamos por*

$$E \hookrightarrow\!\!\!\!\rightarrow F.$$

Teorema 18 (Teorema de extensão)**.** *Seja $1 \leq p \leq \infty$. Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado e assumindo a fronteira de U é C^1. Seja $V \subset \mathbb{R}^n$ aberto tal que $V \subset\subset U$. Então existe um operador linear e limitado*

$$E : W^{1,p}(U) \longrightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$$

tal que para todo $u \in W^{1,p}(U)$:

(1) $Eu = u$ *q.t.p em* U,

(2) $\operatorname{supp} Eu \subset V$,

(3) $\|E(u)\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C(p,k,U,V)\|u\|_{W^{1,p}(U)}$.

Definição 19. *Seja $1 \leq p < n$. O conjugado de Sobolev de p é*

$$p^* = \tfrac{np}{n-p}$$

Note que $\frac{1}{p*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$ e $p^* > p$.

Teorema 20. *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado e suponha $\partial U \in C^1$. Suponha $1 \leq p < n$ e $u \in W^{1,p}(U)$. Então $u \in L^{p^*}(U)$ com a estimativa*

$$\|u\|_{L^{p^*}(U)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(U)}, \tag{10}$$

onde a contante C depende de n, p e U. Em particular, temos para todo $1 \leq q \leq p^*$

$$\|u\|_{L^q(U)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(U)}. \tag{11}$$

Definição 21. *Dizemos que u^* é uma* ***versão*** *de uma determinada função u definida em U quando*

$$u = u^* \text{ em quase todo ponto de } U.$$

Teorema 22. *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto, limitado e suponha $\partial U \in C^1$. Considere $u \in W^{1,p}(U)$, $n < p \leq \infty$. Então u possui uma versão $u^* \in C^{0,\gamma}(\overline{U})$ para $\gamma = 1 - \frac{n}{p}$, com a estimativa*

$$\|u^*\|_{C^{0,\gamma}(\overline{U})} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(U)}. \tag{12}$$

5 Imersões de Sobolev

Teorema 23 (Teorema de Imersões Contínuas)**.** *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e limitado com fronteira C^1. Suponha $u \in W^{k,p}(U)$, $1 \leq p < \infty$.*

(i) Se $k < \frac{n}{p}$, então $u \in L^q(U)$, onde $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n}$ com

$$\|u|_{L^q(U)} \leq C\|u\|_{W^{k,p}(U)}, \tag{13}$$

onde a constante C depende apenas de k, p, n e U.

(ii) Se $k > \frac{n}{p}$, então $u \in C^{m,\gamma}(U)$, com $m = k - \lfloor \frac{n}{p} \rfloor - 1$ e

$$\gamma = \begin{cases} \lfloor \frac{n}{p} \rfloor + 1 - \frac{n}{p}, & se\ \frac{n}{p} \notin \mathbb{Z} \\ \eta, & se\ \frac{n}{p} \in \mathbb{Z}, \end{cases} \tag{14}$$

onde η representa qualquer número positivo menor que 1.
Temos a estimativa

$$\|u\|_{C^{m,\gamma}(\overline{U})} \leq C\|u\|_{W^{k,p}(U)}. \tag{15}$$

Demonstração: **Caso i:** Consideremos $k < \frac{n}{p}$ e seja $u \in W^{k,p}(U)$. Note que se $u \in W^{k,p}(U)$ então $D^\beta u \in W^{1,p}(U)$ para todo $| \beta | \leq k-1$.
De fato, pelas propriedades das derivadas fracas temos

$$u \in W^{k,p}(U) \Rightarrow D^\beta u \in W^{k-|\beta|,p}(U) \ com\ |\beta| \leq k.$$

Pela inclusão dos espaços de Sobolev ($W^{k-|\beta|,p}(U) \subseteq W^{1,p}(U)\ \forall k - |\beta| \geq 1$) temos que

$$k - | \beta | \geq 1 \Rightarrow - | \beta | \geq 1 - k \Rightarrow | \beta | \leq k - 1.$$

Portanto,

$$D^\beta u \in W^{1,p}(U)\ \forall \ | \beta | \leq k-1.$$

Temos também que

$$\|D^\beta u\|_{W^{1,p}(U)} \leq \|u\|_{W^{k,p}(U)},\ \forall \ | \beta | \leq k-1. \tag{16}$$

Note que $D^\beta u$ satisfaz as condições do Teorema 20 para todo $| \beta | \leq k-1$. Logo $D^\beta u \in L^{p^*}(U)$ e existe uma constante C que depende apenas de n, p, U tal que

$$\|D^\beta u\|_{L^{p^*}(U)} \leq C\|D^\beta u\|_{W^{1,p}(U)}. \tag{17}$$

Juntando a desigualdade acima com a desigualdade (16) obtemos

$$\|D^\beta u\|_{L^{p^*}(U)} \leq C\|D^\beta u\|_{W^{1,p}(U)} \leq C\|u\|_{W^{k,p}(U)}. \tag{18}$$

Lembrando que p^* é o conjugado de Sobolev de p, que é dado por

$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n} \Leftrightarrow p^* = \frac{np}{n-p}.$$

Lembre que

$$\|u\|_{W^{k-1,p^*}(U)} = \sum_{|\beta| \leq k-1} \|D^\beta u\|_{L^{p^*}(U)}$$

Pela desigualdade (18) cada fator da soma finita acima é menor ou igual à $C\|u\|_{W^{k,p}(U)}$, portanto

$$\|u\|_{W^{k-1,p^*}(U)} \leq C\|u\|_{W^{k,p}(U)}. \tag{19}$$

Considere $p^* = p_1$, logo $u \in W^{k-1,p_1}(U)$. Aplicando o mesmo processo novamente temos

$$\|D^\beta u\|_{L^{p_1^*}(U)} \leq C\|u\|_{W^{k,p}(U)}, \ \forall \mid \beta \mid \leq k-2.$$

Aplicando o processo k vezes obtemos

$$\|u\|_{L^q(U)} \leq C\|u\|_{W^{k,p}(U)}$$

onde $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n}$.

Caso ii: Se divide em dois subcasos:

a) Consideremos $k > \frac{n}{p}$ e $k \notin \mathbb{Z}$. Seja $\ell = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor$, ou seja, $\ell < \frac{n}{p} < \ell + 1$. Como $k > \frac{n}{p}$ e $\frac{n}{p} > \ell$ temos $k > \ell$.

Seja $u \in W^{k,p}(U)$. Pelas propriedades das derivadas fracas temos

$$D^\beta u \in W^{k-|\beta|,p}(U), \ com \ \mid \beta \mid \leq k.$$

Das inclusões dos espaços de Sobolev temos

$$W^{k-|\beta|,p}(U) \subseteq W^{\ell,p}(U) \ com \ k- \mid \beta \mid \geq \ell \Rightarrow \mid \beta \mid \leq k - \ell.$$

Logo,

$$D^\beta u \in W^{\ell,p}(U) \ \forall \mid \beta \mid \leq k - \ell.$$

Observemos que para todo $\mid \beta \mid \leq k - \ell$

$$\|D^\beta u\|_{W^{\ell,p}(U)} = \sum_{|\alpha| \leq \ell} \|D^\alpha(D^\beta u)\|_{L^p(U)} = \sum_{|\alpha| \leq \ell} \|D^{\alpha+\beta} u\|_{L^p(U)} =$$

e

$$\|u\|_{W^{k,p}(U)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(U)}.$$

Portanto,

$$\|D^\beta u\|_{W^{\ell,p}(U)} \leq \|u\|_{W^{k,p}(U)}, \ \forall \mid \beta \mid \leq k - \ell. \tag{20}$$

Como $D^\beta u \in W^{\ell,p}(U)$ e $\ell < \frac{n}{p}$ da definição da função maior inteiro, podemos aplicar o caso 1 em $D^\beta u$ e obtermos

$$\|D^\beta u\|_{L^q(U)} \leq C\|D^\beta u\|_{W^{\ell,p}(U)}, \ \forall \mid \beta \mid \leq k - \ell \ e \ \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\ell}{n}. \tag{21}$$

Da desigualdade acima temos

$$\|D^\beta u\|_{L^q(U)} \leq C\Big(\sum_{|\alpha| \leq \ell} \|D^\alpha(D^\beta u)\|_{L^p(U)}\Big) = C\Big(\sum_{|\alpha| \leq \ell} \|D^{\alpha+\beta} u\|_{L^p(U)}\Big) \leq C\|u\|_{W^{k,p}(U)}.$$

Logo,
$$\|D^\beta u\|_{L^q(U)}\leq C\|u\|_{W^{k,p}(U)},\ \forall\mid\beta\mid\leq k-\ell. \tag{22}$$
Note que
$$\|u\|_{W^{k-\ell,q}(U)}=\sum_{|\beta|\leq k-\ell}\|D^\beta u\|_{L^q(U)}.$$
Aplicando a desigualdade (22) em cada um dos fatores da soma finita acima temos
$$\|u\|_{W^{k-\ell,q}(U)}\leq C\|u\|_{W^{k,p}(U)},\ \forall\mid\beta\mid\leq k-\ell. \tag{23}$$
Portanto, $u\in W^{k-\ell,q}(U)$.
Usando as propriedades das derivadas fracas e as inclusões dos espaços de Sobolev temos que
$$D^\beta u\in W^{1,q}(U),\ \forall\mid\beta\mid\leq k-\ell-1.$$
Como $\frac{1}{q}=\frac{1}{p}-\frac{\ell}{n}$ e $\frac{n}{p}<\ell+1$ temos que $q>n$. Pelo Teorema 22 concluímos que
$$\|D^\beta u\|_{C^{0,\gamma}(\overline{U})}\leq C\|D^\beta u\|_{W^{1,q}(U)}. \tag{24}$$
Mas
$$\|D^\beta u\|_{W^{1,q}(U)}=\sum_{|\alpha|\leq 1}\|D^\alpha(D^\beta u)\|_{L^q(U)}=\sum_{|\alpha|\leq 1}\|D^{\alpha+\beta}u\|_{L^q(U)}=$$
$$=\underbrace{\|D^\beta u\|_{L^q(U)}}_{\text{índice máximo é }k-\ell-1}+\sum_{|\alpha|=1}\underbrace{\|D^{\alpha+\beta}u\|_{L^q(U)}}_{\text{índice máximo é }k-\ell}.$$
Logo, $\|D^\beta u\|_{W^{1,q}(U)}\leq\|u\|_{W^{k-\ell,q}(U)}$. Portanto,
$$\|D^\beta u\|_{C^{0,\gamma}(\overline{U})}\leq C\|D^\beta u\|_{W^{1,p}(U)}\leq C\|u\|_{W^{k-\ell,q}(U)} \tag{25}$$
onde $\gamma=1-\frac{n}{q}=1-\left(\frac{n}{p}-\ell\right)=1-\frac{n}{p}+\ell=1-\frac{n}{p}+\lfloor\frac{n}{p}\rfloor$.
Usando as inequações (23) e (25) e a definição da norma dos espaços Hölder temos
$$\|u\|_{C^{k-\lfloor\frac{n}{p}\rfloor-1,\gamma}(\overline{U})}=\sum_{|\alpha|\leq k-\lfloor\frac{n}{p}\rfloor-1}\|D^\alpha u\|_{C(\overline{U})}+\sum_{|\alpha|=k-\lfloor\frac{n}{p}\rfloor-1}[D^\alpha u]_{C^{0,\gamma}(\overline{U})}\leq$$
$$\leq C\|u\|_{W^{k-\ell,q}(U)}\leq C\|u\|_{W^{k,p}(U)}.$$

b) Consideremos $k>\frac{n}{p}$ e $\frac{n}{p}\in\mathbb{Z}$. Seja $\ell=\frac{n}{p}-1$, segue $\ell<\frac{n}{p}<k$. Seja $u\in W^{k,p}(U)$ então,
$$D^\beta u\in W^{\ell,p}(U),\ \forall\mid\beta\mid\leq k-\ell.$$

Pela definição de norma dos espaços de Sobolev segue,

$$\|D^\beta u\|_{W^{\ell,p}(U)} = \sum_{|\alpha|\leq \ell} \|D^\alpha(D^\beta u)\|_{L^p(U)},\ \forall|\beta| \leq k-\ell.$$

Logo

$$\|D^\beta u\|_{W^{\ell,p}(U)} \leq \|u\|_{W^{k,p}(U)}\ \forall|\beta| \leq k-\ell. \tag{26}$$

Observe que $\ell < \frac{n}{p}$ podemos aplicar o caso do item i) em $D^\beta u \in W^{\ell,p}(U)$, segue que,

$$\|D^\beta u\|_{L^q(U)} \leq C\|D^\beta u\|_{W^{\ell,p}(U)},\ \forall|\beta| \leq k-\ell \text{ e } \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\ell}{n}. \tag{27}$$

Aplicando as desigualdades (26) em (27) obtemos:

$$\|D^\beta u\|_{L^q(U)} \leq C\|u\|_{W^{k,p}(U)},\ \forall|\beta| \leq k-\ell. \tag{28}$$

Assim, $D^\beta u \in L^q(U),\ \forall|\beta| \leq k-\ell$ e pela definição dos espaços de Sobolev segue que, $u \in W^{k-\ell,q}(U)$. Daí utilizando a definição de norma em $u \in W^{k-\ell,q}(U)$ e pela desigualdade (28), temos

$$\sum_{|\beta|\leq k-\ell} \|D^\beta u\|_{L^q(U)} \leq C \sum_{|\beta|\leq k-\ell} \|u\|_{W^{k,p}(U)},\ \forall|\beta| \leq k-\ell.$$

Logo,

$$\|u\|_{W^{k-\ell,q}(U)} \leq C_1\|u\|_{W^{k,p}(U)}, \tag{29}$$

onde $C_1 = \displaystyle\sum_{|\beta|\leq k-\ell} C$.

Por outro lado, como $\ell = \frac{n}{p} - 1$, então $n = q$. Substituindo n por q temos, $u \in W^{k-\ell,n}(U)$ e como $|U| < \infty$, então $u \in W^{k-\ell,r}(U),\ \forall 1 \leq r < n$ temos,

$$\|u\|_{W^{k-\ell,r}(U)} \leq C_2\|u\|_{W^{k-\ell,n}(U)}. \tag{30}$$

Para todo $|\beta| \leq k-\ell-1$ temos

$$D^\beta u \in L^r(U)$$
$$\text{e}$$
$$D(D^\beta u) = D^{\beta+1}u \in L^r(U),\ \forall|\beta+1| \leq k-\ell.$$

Logo $D^\beta u \in W^{1,r}(U),\ \forall|\beta| \leq k-\ell-1$, utilizando a definição de norma dos espaços de Sobolev, obtemos

$$\|D^\beta u\|_{W^{1,r}(U)} \leq \|u\|_{W^{k-\ell,r}(U)},\ \forall|\beta| \leq k-\ell-1. \tag{31}$$

Aplicando o Teorema (20) em $D^\beta u \in W^{1,r}(U)$ com $r < n$ implica,

$$\|D^\beta u\|_{L^{r^*}(U)} \leq C_3\|D^\beta u\|_{W^{1,r}(U)},\ \forall|\beta| \leq k-\ell-1$$

com $\frac{1}{r^*} = \frac{1}{r} - \frac{1}{n}$. Daí, pelas inequações (31) e (30), obtemos

$$\|D^\beta u\|_{L^{r^*}(U)} \leq C_4 \|u\|_{W^{k-\ell,n}(U)},\ \forall |\beta| \leq k - \ell - 1,\ \forall r < n \tag{32}$$

onde $C_4 = C_3.C_2$.

Por outro lado, como $r^* = \frac{rn}{n-r}$ observe que, se $r \to n$ então $r^* \to \infty$. Daí para qualquer $n < s < \infty$, podemos escolher para algum $r < n$ tal que $s < r^*$, temos

$$D^\beta u \in L^s(U),\ \forall |\beta| \leq k - \frac{n}{p}, \tag{33}$$

e

$$\|D^\beta u\|_{L^s(U)} \leq C_5 \|D^\beta u\|_{L^{r^*}(U)},\ \forall |\beta| \leq k - \frac{n}{p}. \tag{34}$$

Pela afirmação (33) e a definição do espaço de Sobolev, temos

$$u \in W^{k-\frac{n}{p},s}(U),\ \forall\ n < s < \infty.$$

Para todo $|\beta| \leq k - \frac{n}{p} - 1$ temos, $D^\beta u \in W^{1,s}(U)$

$$\|D^\beta u\|_{W^{1,s}(U)} \leq \|u\|_{W^{k-\frac{n}{p},s}(U)}, \forall\ |\beta| \leq k - \frac{n}{p} - 1,\ \forall\ n < s < \infty. \tag{35}$$

Aplicando o Teorema 22 em $D^\beta u \in W^{1,s}(U)$ com $n < s$, temos

$$\|D^\beta u\|_{C^{0,\gamma}}(\overline{U}) \leq C_6 \|D^\beta u\|_{W^{1,s}}(U),$$

para todo $|\beta| \leq k - \frac{n}{p} - 1$ e $n < s < \infty$, onde $\gamma = 1 - \frac{n}{s}$.

Logo pelas desigualdades (32), (34) e (35) temos,

$$\begin{aligned}
\|D^\beta u\|_{C^{0,\gamma}(\overline{U})} &\leq C_6 \|u\|_{W^{k-\frac{n}{p},s}(U)} \\
&= C_6 \left(\sum_{|\alpha| \leq k - \frac{n}{p}} \|D^\alpha u\|_{L^s(U)} \right) \\
&\leq C_6.C_5 \sum_{|\alpha| \leq k - \frac{n}{p}} \|D^\alpha u\|_{L^{r^*}(U)} \\
&\leq C_6.C_5.C_4 \sum_{|\alpha| \leq k - \frac{n}{p}} \|u\|_{W^{k-l,n}(U)} \\
&= C_7 \sum_{|\alpha| \leq k - \frac{n}{p}} \|u\|_{W^{k-l,n}(U)},
\end{aligned}$$

onde $C_7 = C_6.C_5 \left(\sum_{|\alpha| \leq k - \frac{n}{p}} c_4 \right)$.

Pela desigualdade (29), temos

$$\|D^\beta u\|_{C^{0,\gamma}(\overline{U})} \leq C_8 \|u\|_{W^{k,p}(U)}, \forall |\beta| \leq k - \frac{n}{p} - 1 \tag{36}$$

onde $C_8 = C_7.C_1$ e $\gamma = 1 - \frac{n}{s}$.

Note que se, $n < s < \infty$, então $0 < 1 - \frac{n}{s} < 1$ assim $0 < \gamma < 1$. Utilizando a definição de norma dos espaços de Hölder $C^{0,\gamma}(\overline{U})$ temos,

$$\|D^\beta u\|_{C^{0,\gamma}(\overline{U})} = \|D^\beta u\|_{L^\infty(\overline{U})} + [D^\beta u]_{C^{0,\gamma}(\overline{U})}.$$

Logo

$$\sum_{|\beta| \leq k - \frac{n}{p} - 1} \|D^\beta u\|_{C^{0,\gamma}(\overline{U})} = \sum_{|\beta| \leq k - \frac{n}{p} - 1} \|D^\beta u\|_{L^\infty(\overline{U})} + \sum_{|\beta| \leq k - \frac{n}{p} - 1} [D^\beta u]_{C^{0,\gamma}(\overline{U})},$$

segue

$$\|u\|_{C^{m,\gamma}(\overline{U})} \leq \sum_{|\beta| \leq k - \frac{n}{p} - 1} \|D^\beta u\|_{C^{0,\gamma}(\overline{U})}$$

onde $m = k - \frac{n}{p} - 1$. Logo pela desigualdade (36), obtemos a seguinte desigualdade

$$\|u\|_{C^{m,\gamma}(\overline{U})} \leq \sum_{|\beta| \leq k - \frac{n}{p} - 1} C_8 \|u\|_{W^{k,p}(U)}.$$

Portanto concluímos que

$$\|u\|_{C^{m,\gamma}(\overline{U})} \leq C_9 \|u\|_{W^{k,p}(U)},\ \forall 0 < \gamma < 1$$

onde $C_9 = \sum_{|\beta| \leq k - \frac{n}{p} - 1} c_8$ e $m = k - \frac{n}{p} - 1$.

Teorema 24 (Teorema de Imersões Contínuas)**.** *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado com fronteira C^1. Suponha $u \in W^{k,p}(U),\ 1 \leq p < \infty$. Se $kp = n$, então*

$$W^{k,p}(U) \hookrightarrow L^q(U),\ \forall q \in [p, \infty),$$

com

$$\|u\|_{L^q(U)} \leq C \|u\|_{W^{k,p}(U)},$$

onde a constante C depende apenas de k, n, p, q.

Observação 25. *Antes de fazer a demonstração do Teorema 24 precisamos enunciar o seguinte Lema, pois será essencial para o desenvolvimento da prova do Teorema. Além disso esse Lema é uma extensão do Teorema 20 para $p = n$.*

Lema 26. *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado com fronteira C^1. Seja $u \in W^{1,n}(U)$. Então existe uma constante $C(n, q, U)$ tal que*

$$\|u\|_{L^q(U)} \leq C \|u\|_{W^{1,n}(U)}.$$

onde

$$\begin{cases} q = \infty, & se \quad n = 1, \\ 1 \leq q < \infty, & se \quad n > 1. \end{cases}$$

Demonstração: Vamos a dividir a prova em dois casos:

- Para $n = 1$:

  Primeiro mostraremos que para qualquer $v \in C_c^1(\mathbb{R})$ e $x \in \mathbb{R}$, pelo Teorema Fundamental do Cálculo temos

$$\begin{aligned} v(x) &= \int_{-\infty}^{x} Dv(y)dy \\ |v(x)| &= \left| \int_{-\infty}^{x} Dv(y)dy \right| \\ |v(x)| &\leq \int_{-\infty}^{x} |Dv(y)|dy \\ |v(x)| &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |Dv(y)|dy \\ \operatorname*{supp}_{x\in\mathbb{R}} |v(x)| &\leq \|Dv\|_{L^1(\mathbb{R})} \end{aligned}$$

  segue

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|Dv\|_{L^1(\mathbb{R})}, \ \forall v \in C_c^1(\mathbb{R}). \tag{37}$$

  Por outro lado, seja $u \in W^{1,1}(U)$ pelo Teorema de Extensão 18, existe $\overline{u} \in W^{1,1}(U)$ tal que $\overline{u} = u$ *q.t.p* em U e existe uma constante c_1 tal que

$$\|\overline{u}\|_{W^{1,1}(\mathbb{R})} \leq c_1 \|u\|_{W^{1,1}(U)}. \tag{38}$$

  Pelo fato, $\overline{C_c^1(\mathbb{R})} = W^{1,1}(\mathbb{R})$, temos que existe uma sequência $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset C_c^1(\mathbb{R})$ tal que $u_k \to \overline{u}$ em $W^{1,1}(\mathbb{R})$ ou seja , para qualquer $\epsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|u_k - \overline{u}\|_{W^{1,1}(\mathbb{R})} < \epsilon, \ \forall k \geq k_0$. Pela definição de norma dos espaços de Sobolev temos a seguinte desigualdade

$$\|D(u_k - \overline{u})\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \|u_k - \overline{u}\|_{W^{1,1}(\mathbb{R})} < \epsilon, \ \forall k \geq k_0.$$

  Logo

$$Du_k \to D\overline{u} \text{ em } L^1(\mathbb{R}). \tag{39}$$

  Mostrando que

$$u_k \to \overline{u} \text{ em } L^\infty(\mathbb{R}). \tag{40}$$

  Aplicando a desigualdade (37) para $u_k \in C_c^1(\mathbb{R})$ temos,

$$\|u_k\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|Du_k\|_{L^1(\mathbb{R})},\ \forall k \in \mathbb{N}$$

Fazendo $k \to \infty$ na desigualdade acima e pelas inequações (39) e (40), obtemos

$$\|u\|_{L^\infty(U)} \leq \|\overline{u}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|D\overline{u}\|_{L^1(\mathbb{R})}. \tag{41}$$

Logo pela definição de norma do espaço $W^{1,1}(\mathbb{R})$ e da inequação (38) aplicada em (41)

$$\|u\|_{L^\infty(U)} \leq c_1\|u\|_{W^{1,1}(U)}.$$

- Para $n \geq 2$:
  Escolhendo $n \leq r < \infty$. Estabelecendo $\frac{1}{s} = \frac{1}{n} + \frac{1}{r}$ segue $1 \leq s < n$ e $r = \frac{sn}{n-s}$ onde r é o conjugado de s. Note que $|U| < \infty$ e $s < n$, então existe uma constante c tal que

$$\|u\|_{W^{1,s}(U)} \leq c\|u\|_{W^{1,n}(U)}. \tag{42}$$

Aplicando o Teorema 20 em $u \in W^{1,s}(U)$ com $s < n$, segue que

$$\|u\|_{L^{s^*}(U)} \leq c_1\|u\|_{W^{1,s}(U)}. \tag{43}$$

Note que $s^* = r$ e aplicando a inequação (42) em (43) segue

$$\|u\|_{L^r(U)} \leq c_2\|u\|_{W^{1,n}(U)}. \tag{44}$$

Como $|U| < \infty$ e para qualquer $1 \leq q \leq r$ temos $\|u\|_{L^q(U)} \leq c_3\|u\|_{L^r(U)}$. Daí aplicando em à desigualdade (44) obtemos

$$\|u\|_{L^q(U)} \leq C\|u\|_{W^{1,n}(U)},$$

onde $C = c_3.c_2$.

Observe que o r foi escolhido arbitrariamente, logo temos que para qualquer $1 \leq q < \infty$, existe $n \leq r < \infty$ com $q \leq r$. Finalmente concluímos que

$$\|u\|_{L^q(U)} \leq C\|u\|_{W^{1,n}(U)},\ \forall 1 \leq q < \infty.$$

Demonstração (Teorema 24): A prova se divide em dois casos:

i) Para $k = 1$ aplicando o Lema 26, que está demonstrado o teorema.

ii) Para $k > 1$ segue $n > 1$. Por hipóteses $u \in W^{k,p}(U)$ implica

$$u \in W^{k-1,p}(U),$$

logo

$$D^\beta u \in W^{k-1,p}(U), \forall |\beta| = 1.$$

Note que $(k-1)p < n$, aplicando o Teorema 23 caso i) acima, temos que

$$\|u\|_{L^r(U)} \leq c_1 \|u\|_{W^{k-1,p}(U)}. \tag{45}$$

$$\|D^\beta u\|_{L^r(U)} \leq c_2 \|u\|_{W^{k-1,p}(U)}, \ \forall |\beta| = 1. \tag{46}$$

com $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{k-1}{n}$ pelo anterior, temos por definição dos espaços de Sobolev $u \in W^{1,r}(U)$ e $r = n$. Assim $u \in W^{1,n}(U)$ com $n > 1$ e por definição de norma dos espaços de Sobolev

$$\|u\|_{W^{1,n}(U)} = \|u\|_{L^n(U)} + \sum_{|\beta|=1} \|u\|_{L^n(U)}.$$

Aplicando as desigualdades (45) e (46) segue que

$$\begin{aligned} \|u\|_{W^{1,n}(U)} &\leq c_1 \|u\|_{W^{k-1,p}(U)} + c_3 \|u\|_{W^{k-1,p}(U)} \\ &= (c_1 + c_3) \|u\|_{W^{k-1,p}(U)} \\ &= c_4 \|u\|_{W^{k-1,p}(U)} \\ &= c_4 \|u\|_{W^{k,p}(U)}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\|u\|_{W^{1,n}(U)} \leq c_4 \|u\|_{W^{k,p}(U)}. \tag{47}$$

Além disso, como $u \in W^{1,n}(U)$ aplicando o Lema 26 para $n > 1$ temos

$$\|u\|_{L^q(U)} \leq c \|u\|_{W^{1,n}(U)}.$$

Finalmente, aplicando a inequação (47) acima concluímos que

$$\|u\|_{L^q(U)} \leq C \|u\|_{W^{k,p}(U)}, \ \forall\ 1 \leq q < \infty.$$

Agora daremos o resultado de imersão compacta de Sobolev para conjuntos abertos Lipschitz. Começamos dando contra-exemplos para o exponente crítico ou também chamado conjugado de Sobolev em um conjunto limitado, e uma imersão não compacta para o caso de um conjunto ilimitado.

Exemplo 27. *Seja $U = B(0,1) \subset \mathbb{R}^n$ com $n > p$ e $k = 1$, então a imersão $W^{1,1}(U) \hookrightarrow L^q(U)$ não é compacta para $q = \frac{n}{n-p}$.*
Seja uma função $f \in C^1$ em $\mathbb{R}^n$ com suporte compacto em U, f identicamente não nula e defina

$$f_k(x) = k^{n-1} f(kx), \forall k \in \mathbb{N}.$$

Note que, $f \in W^{1,1}(U)$*. Por outro lado*

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_i}(x) = k^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(kx), \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Segue que $f_k \in W^{1,1}(U), \forall k \in \mathbb{N}$*. Seja* $x \in U$*, temos que a sequência* $(f_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ *converge a zero em quase todo ponto e em* $L^1(U)$*. Daí,*

$$\|f_k\|_{L^1(U)} = \frac{1}{k}\|f\|_{L^1(U)}, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Logo $(f_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ *é limitada em* $L^1(U)$*. Além disso, seu gradiente é limitado em* $L^1(U)$*. De fato*

$$\|\nabla f_k\|_{L^1(U)} = \frac{1}{k}\|\nabla f\|_{L^1(U)}, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Segue que o gradiente de $(\nabla f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *é limitado em* $L^1(U)$*. Então* $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *é limitada em* $W^{1,1}(U)$*, logo aplicando o Teorema 23 item i) segue que,* $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset L^{\frac{n}{n-1}}(U)$*.*
Agora assumindo que $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *possui uma subsequência tal que* $f_{k_m} \to 0$ *em* $L^{\frac{n}{n-1}}(U)$*. Note que*

$$\|f_k\|_{L^{\frac{n}{n-1}}(U)} = \|f\|_{L^{\frac{n}{n-1}}(U)}, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Logo $\|f_{k_m}\|_{L^{\frac{n}{n-1}}(U)} = \|f\|_{L^{\frac{n}{n-1}}(U)} \to 0$*. Isso implica que* f *é nula, o que é uma contradição.*

Exemplo 28. *A imersão* $W^{1,1}(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^1(\mathbb{R})$ *não é compacta. Seja uma função* $f \in C^1$ *em* $\mathbb{R}$ *com suporte compacto em* $\mathbb{R}$*,* f *identicamente não nula e seja uma sequência* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \to \infty$*. Defina*

$$f_k(x) = f(x - x_k), \forall k \in \mathbb{N}.$$

Note que $f \in W^{1,1}(\mathbb{R})$*, segue que* $f_k \in W^{1,1}(\mathbb{R}), \forall k \in \mathbb{N}$*. Seja* $x \in \mathbb{R}$*, temos que a sequência* $(f_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ *converge a zero em quase todo ponto em* $L^1(\mathbb{R})$*. Daí,*

$$\|f_k\|_{W^{1,1}(\mathbb{R})} = \|f\|_{W^{1,1}(\mathbb{R})}, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Logo $(f_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ *é limitada em* $W^{1,1}(\mathbb{R})$*. Agora suponha que* $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *possui uma subsequência tal que* $f_{k_m} \to 0$ *em* $L^1(\mathbb{R})$*. Logo*

$$\|f_{k_m}\|_{L^1(\mathbb{R})} = \|f\|_{L^1(\mathbb{R})} \to 0.$$

Isto implica que f *é nula, o que é uma contradição.*

A prova do seguinte Teorema pode ser consultada em [[1] Teorema 2.80 e Teorema 2.84].

Teorema 29 (Teorema da imersão compacta de Sobolev)**.** *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto, Lipschitz e limitado. Sejam $k > 0$ inteiro e $1 \leq p \leq \infty$.*

1. *Se $kp < n$, então $W^{k,p}(U) \hookrightarrow\!\!\!\rightarrow L^q(U)$ para todo $q < \frac{np}{n-kp}$;*

2. *Se $kp = n$, então $W^{k,p}(U) \hookrightarrow\!\!\!\rightarrow L^q(U)$ para todo $q < \infty$;*

3. *Para $kp > n$, temos:*

   - *Se $\frac{n}{p} \notin \mathbb{N}$, então $W^{k,p}(U) \hookrightarrow\!\!\!\rightarrow C^{k-\frac{n}{p}-1,\lambda}(\overline{U})$ para todo $\lambda < [\frac{n}{p}]+1-\frac{n}{p}$;*
   - *Se $\frac{n}{p} \in \mathbb{N}$, então $W^{k,p}(U) \hookrightarrow\!\!\!\rightarrow C^{k-\frac{n}{p}-1,\lambda}(\overline{U})$ para todo $\lambda < 1$.*

Referências

[1] F. Demengel and G. Demengel. **Functional Spaces for the Theory of Elliptic Partial Differential Equations**. Springer, 2012.

[2] J. Penteker. **Sobolev Spaces**.Lecture notes, 2015.

[3] L. C. Evans. **Partial Differential Equations**. Graduate Studies in Mathematics, Volume 19. American Mathematical Society. Second Edition, 2010.

[4] R. J. Biezuner. **Equações Diferenciais Parciais I/II**. Notas de aula, 2010.