Geometria e Desenho Geométrico I.
Notas do Curso MAT 230 do IME–USP

Prof. Ricardo Bianconi

Departamento de Matemática
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade de São Paulo

Notas revisadas e ampliadas por Paolo Piccione

Sumário

Lista de Figuras

Prefácio

[1] O objetivo desta disciplina é discutir os fundamentos da geometria euclideana (*o quê* e o *porque* das construções geométricas estudadas). Vamos fazer isto introduzindo definições dos vários objetos a serem estudados e *postulados*, que vão definir e restringir as propriedades de tais objetos e "regulamentar" as construções geométricas permitidas. Vai ser muito importante o estudo do *Postulado das Paralelas* (que diz que dada uma linha ℓ e um ponto P fora dela, então existe uma única linha passando por P e paralela a ℓ). Desde os tempos de Euclides (em torno de 300 AC) até o século XIX, diversos matemáticos tentaram *provar* este postulado a partir dos outros. Estas tentativas foram extremamente frutíferas no sentido de se descobrirem várias construções geométricas importantes, bem como novas geometrias em que não vale o postulado. Estas novas geometrias é que permitiram Einstein formular a Teoria da Relatividade Geral (como ele mesmo reconheceu).

Neste texto estão incluídos vários exercícios. Os desenhos explicativos irão surgir numa edição posterior deste texto. Convido os leitores a fazerem seus próprios desenhos, tentando entender o que está escrito.

[1] Prefácio redigida para a primeira edição das notas redigidas pelo Prof. Bianconi.

Introdução: o método axiomático na Geometria

O método axiomático [2] na Matemática foi introduzido na Teoria Geométrica de Euclides. Apesar do fato que a Matemática dos gregos não foi desenvolvida ou apresentada exclusivamente na forma rígida de postulados, o enorme impacto que ela teve no desenvolvimento subsequente foi tão grande que ela virou o modelo para toda demostração rigorosa em Matemática. Tembém filósofos, como Espinoza na sua obra *Ethica, more geometrica demonstrata,* tentaram uma apresentação dos seus argomentos em forma de teoremas deduzidos de definições e axiomas. Na Matemática moderna, começando com a tradição euclideana nos séculos XVII e XVIII, o método axiomático se impous em todas as áreas. Um dos mais recentes resultados dessa metologia foi a criação de uma nova disciplina: a Lógica Matemática.

Em termos gerais, o método axiomático pode ser descrito da seguinte maneira: provar um teorema no sistema dedutivo significa mostrar que o resultado é uma conseqüência lógica de algum resultado provado anteriormente. Esses outros resultados devem ter sido provados da mesma forma, ou seja, como conseqüência de resultados anteriores, e assim vai. O processo de uma prova matemática seria portanto uma tarefa impossível de regresso infinito, a não ser que fosse permitido de puder parar em algum ponto da regressão. Devem portanto existir algumas afirmações, chamadas de *postulados* ou *axiomas*, que sejam consideradas "verdadeiras" sem necessidade de demonstração. Partindo desses axiomas, podemos tentar deduzir todos os outros teoremas usando apenas argomentos de lógica. Se todos os resultados de uma teoria científica podem ser deduzidos de um número de axiomas, possivelmente poucos, simples e plausíveis, então se diz que a teoria é apresentada em forma axiomática. A escolha das proposições escolhidas como axiomas da teoria é basicamente arbitrária, porém, as vantagens de uma formulação axiomática são mínimas se os postulados não forem simples e em número pequeno. Além disso, os postulados devem ser *consistentes*, no sentido que dois teoremas deduzidos por eles não podem ser contraditórios, e o sistema de axiomas deve ser *completo*, ou seja, todos os teoremas da teoria devem ser deduzidos por esses. Por motivos de economia, é também desejável que os postulados sejam *independentes*, no sentido que nenhum deles deve poder ser deduzido pelos outros. A questão da consistência e da completude de um sistema de axiomas é um assunto muito delicado e muito debatido. Existem duas visões antitéticas sobre os fundamentos da Matemática, como conseqüência de diferentes convicções filosóficas sobre as raízes do conhecimento humano. Se as entidades matemáticas forem consideradas objetos *substanciais* num reino de "intuição pura", independentes de definições e de atos individuais da mente humana, então obviamente não existiria o problema

[2] Tradução livre de [**1**, Ch. IV, §9, 1]

de contradições,, já que os fatos matemáticos seriam afirmações objetivamente verdadeiras que descrevem a realidade. Nessa visão "Kanteana" não teria portanto o problema da "consistência" para um sistema de axiomas. Infelizmente, o corpo da Matemática atual não pode ser reduzido a um sistema filosófico tão simples. As teorias intuicionistas matemáticas modernas não são baseadas no conecito de intuição pura no amplo sentido Kanteano. Nessas teorias o infinito enumerável é aceito como criatura legítima da intuição, e nelas são aceitas apenas propriedades *construtivas*; portanto, alguns conceitos básicos como o *contínuo* seriam banidos, algumas partes importantes da Matemática atual seriam desconsideradas, e muitas outras partes seriam seriamente complicadas.

A visão adoptada pelo "formalistas" é bastante diferente. Eles não atribuem uma realidade intuitiva aos objetos matemáticos, nem eles afirmam que um sistemas de axiomas expresse realidades obvias da intuição; a preocupação deles é apenas no procedimento lógico formal baseado nos postulados. Essa atitude tém uma primeira grande vantagem sobre o intuicionismo: ela garante à Matemática toda a liberdade necessária para teoria e aplicações. Por outro lado, essa atitude impõe ao formalista a necessidade de "provar" que seus axiomas, que agora aparecem como mera criação da mente humana, não levem a contradição. Nas últimas décadas forma realizados grandes esforços para produzior provas da consistência de um sistema de axiomas, pelo menos para os axiomas da Aritmética e da Álgebra, e para a hipótese do contínuo. Os resultados obtidos são significativos, mas o sucesso total ainda é longe. Pois, alguns resultados recentes indicam que tais esforços não podem ser totalmente sucedidos, no sentido que demostrações de consitência e de completude podem não existir dentro de um sistema de axiomas estritamente fechado. Surpreendentemente, todos esses argumentos sobre os fundamentos procedem por métodos que são construtivos, e direcionados por esquemas intuitivos.

Acentuado pelos paradoxos da Teoria dos Conjuntos,

...

A totalidade dos axiomas da geometria fornece a *definição implícita* de todos os termos geométricos "indefinidos", como os termos "linha", "ponto", "incidência", etc. Para as aplicação é importante que os conceitos e os axiomas da geometria tenha uma correspondência fácil com os fatos fisicamente verificáveis dos objetos "reais" e "tangíveis". A realidade física atrás do conceito de "ponto" é a de um objeto "muito pequeno", como a ponta de uma caneta, em quanto uma "linha reta" é uma abstração de um "fio" extenso indefinitamente, ou de um raio de luz. Se verifica que as propriedades dos pontos e das linhas físicas correspondem mais ou menos com os axiomas formais da geometria. Não é absurdo imaginar que realizando experimentos mais precisos leve a necessidade de modificar os axiomas, se os axiomas devem dar uma descrição adequada dos fenômenos físicos. Mas se os axiomas formais não correspondessem mais ou menos com as propriedades dos objetos físicos, então a geometria não teria um grande interesse. Portanto, também para os formalistas, existe uma autoridade acima da mente humana que decide a direção do pensamento matemático.

CAPÍTULO 1

Geometria de Incidência

1.1. Postulados da Geometria de de Incidência

Vamos começar o estudo da Geometria introduzindo as duas noções principais: a de ponto e a de linha. Essas noções estão relacionadas por uma colecção de *axiomas*, ou *postulados*.

Uma **geometria (plana) de incidência** é um conjunto π que chamamos de plano, cujos elementos são chamados de **pontos**, e uma família $\mathcal{L}$ de subconjuntos de π chamados de **linhas**. Os postulados de incidência impõem as primeiras restrições sobre as linhas:

POSTULADO 1. *Dados dois pontos distintos P e Q, existe uma única linha $\ell \in \mathcal{L}$ contendo P e Q, que podemos denotar como* $\overleftrightarrow{PQ}$

POSTULADO 2. *Cada linha $\ell \in \mathcal{L}$ contém pelo menos dois pontos.*

POSTULADO 3. *Existem pelo menos três pontos não colineares (ou seja, não numa mesma linha).*

Com isto ainda temos uma classe muito grande de possibilidades, inclusive geometrias finitas. Por exemplo, $\pi = \{A, B, C\}$ um plano com três pontos, tendo como linhas $\ell_1 = \{A, B\}$, $\ell_2 = \{A, C\}$ e $\ell_3 = \{B, C\}$. É claro que valem os três postulados para esta geometria.

EXERCÍCIO 1.1. Dada uma geometria de incidência $(\pi, \mathcal{L})$ e uma linha $\ell \in \mathcal{L}$, mostre que existe um ponto P fora de ℓ. (Que postulados garantem isto?) Mais geralmente, prove que vale a seguinte forma mais forte do Postulado 3 acima:

POSTULADO (3b). *Dados dois pontos* distintos P *e* Q *em* π *existe um terceiro ponto R em π tal que P, Q e R não são colineares.*

EXERCÍCIO 1.2. O plano π da **Geometria Analítica** é o conjunto $I\!R^2$ dos pares ordenados de números reais. As linhas são as retas $\ell_{a,b,c}$ dadas por:

$$\ell_{a,b,c} = \big\{(x, y) \in I\!R^2 : ax + by = c\big\},$$

onde $a, b, c \in I\!R$ e $(a, b) \neq (0, 0)$. Mostre que esta é uma geometria de incidência. (*Sugestão: Verifique se valem os postulados: para o primeiro, ache a equação da reta que passa pelos pontos P e Q em termos de suas coordenadas, verificando que a reta é única. Na prova da unicidade, se observe que as retas $\ell_{a,b,c}$ e $\ell_{a',b',c'}$ coincidem exatamente quando $(a', b', c') = \lambda(a, b, c)$ por algum $\lambda \in I\!R \setminus \{0\}$. Para verificar o segundo postulado, prove que cada reta tem pelo menos dois pontos, dando exemplos particulares; dê exemplo de três pontos não colineares.*)

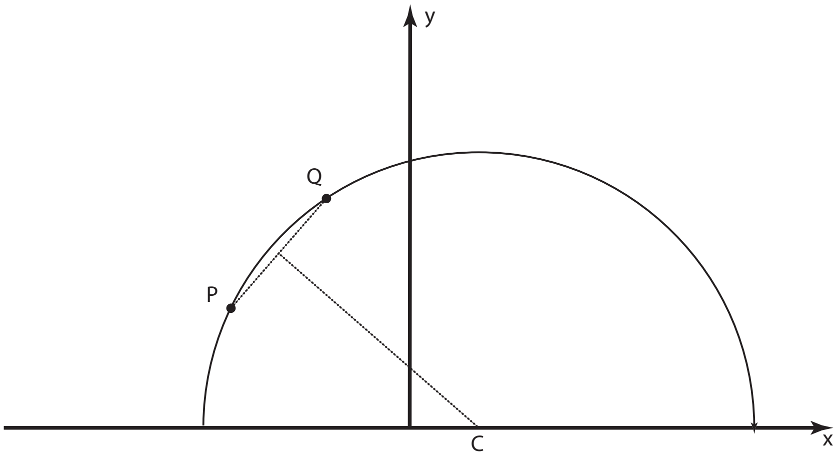

FIGURA 1.1. Linha entre os pontos P e Q no plano da Geometria Hiperbólica.

EXERCÍCIO 1.3. O plano da **Geometria Hiperbólica** é o conjunto

$$\mathbb{H} = \{(x, y) \in I\!R^2 : y > 0\}.$$

As linhas são de dois tipos: verticais

$$\ell_a = \big\{(x, y) \in \mathbb{H} : x = a\big\}$$

ou arcos de circunferência

$$\ell_{p,r} = \big\{(x, y) \in \mathbb{H} : (x - p)^2 + y^2 = r^2\big\}.$$

Mostre que esta é uma geometria de incidência. Na Figura 1.1 mostramos como construir a linha entre dois pontos P e Q em $\mathbb{H}$ que não sejam alinhados na direção vertical.
(*Sugestão: Verifique se valem os postulados: para mostrar a existência e a unicidade da linha unindo dois pontos P e Q de $\mathbb{H}$, separe em dois casos:*

- *quando P e Q têm a mesma abscissa,*
- *quando P e Q têm abscissas diferentes.*

No primeiro caso, P e Q são contido numa semireta vertical; no segundo caso, a construção da linha hiperbólica por P e Q pode ser construida geometricamente, como sugerido pela Figura 1.1. Para verificar o segundo postulado, verifique que cada linha tém pelo menos dois pontos, dando exemplos particulares; dê exemplo de três pontos não colineares.)

Vamos agora introduzir outros modelos de geometria de incidência obtidos modificando o exemplo padrão da Geometria Analítica.

EXERCÍCIO 1.4. O **plano de Moulton** é o conjunto $I\!R^2$, com linhas da forma

$$\ell_a = \big\{(x, y) \in I\!R^2 : x = a\big\},$$

que são retas verticais, ou da forma

$$\ell_{m,b} = \big\{(x, y) \in I\!R^2 : y = mx + b\big\},$$

com $m < 0$ (linhas retas de inclinações negativas) ou da forma

$$\ell^*_{m,b} = \big\{(x, y) \in I\!R^2 : \ y = 2mx + b, \text{ se } x < 0 \text{ e } y = mx + b \text{ se } x \geq 0\big\},$$

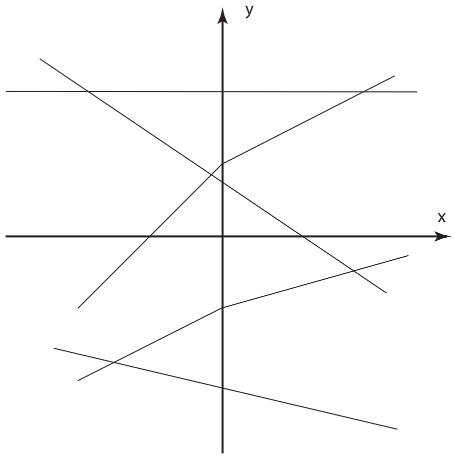

FIGURA 1.2. O plano de Moulton e suas linhas

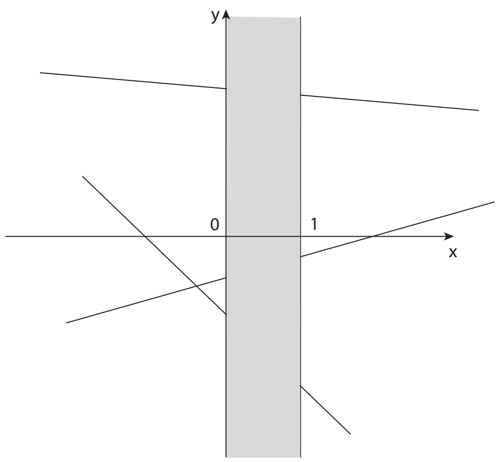

FIGURA 1.3. O plano rasgado e suas linhas.

com $m \geq 0$, (linhas quebradas e de inclinacoes positivas quando passam pelo eixo Oy). Mostre que esta também é geometria de incidência.

O próximo modelo de geometria de incidência é obtido tirando uma faixa do plano da geometria analí tica, obtendo um plano que não é *conexo*.

EXERCÍCIO 1.5. O **plano "rasgado"** é o conjunto:

$$\pi = \big\{(x, y) \in I\!R^2 : x < 0 \text{ ou } x \geq 1\big\}$$

e suas linhas

são da forma

$$\ell_{a,b,c} = \big\{(x, y) \in \pi : ax + by = \big\},$$

onnde $a, b, c \in I\!R$ e $(a, b) \neq (0, 0)$. Mostre que esta é uma geometria de incidência.

EXERCÍCIO 1.6. A **geometria esférica** têm como plano a superfície esférica $\mathbb{S}^2$ de equação: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ no $I\!R^3$. Suas linhas são os círculos máximos da superfície esférica, que são dados pelas interseções dos planos pela origem com

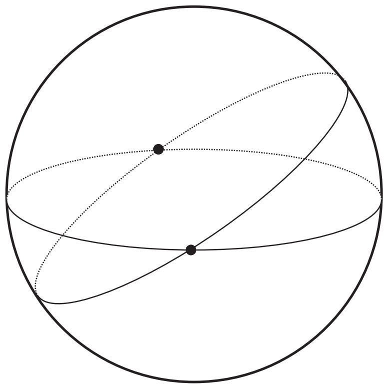

FIGURA 1.4. Círculos máximos na esfera.

$\mathbb{S}^2$. Mostre que esta *não é uma geometria de incidência*.
(*Sug.: Pontos antipodais são unidos por infinitos círculos máximos distintos.*)

DEFINIÇÃO. Dada uma geometria de incidência $(\pi, \mathcal{L})$, chamamos *paralelas* duas linhas $\ell_1, \ell_2 \in \mathcal{L}$ tais que $\ell_1 \cap \ell_2 = \emptyset$ ou tais que $\ell_1 = \ell_2$.

DEFINIÇÃO. Uma **geometria projetiva plana** é uma geometria de incidência que também satisfaz mais dois postulados:

POSTULADO (GP1). *Cada linha tem pelo menos três pontos;*

POSTULADO (GP2). *Dadas duas linha distintas ℓ_1 e ℓ_2, existe um único ponto comum às duas linhas.*

Observe que numa geometria projetiva plana, duas linhas são paralelas só se forem iguais. O exemplo mais importante de geometria projetiva plana será apresentado na Seção 1.2.

EXERCÍCIO 1.7. Consideremos um plano formado por 7 pontos:

$$\pi = \big\{A, B, C, D, E, F, G\big\},$$

e com a seguinte família $\mathcal{L}$ de linhas: $\ell_1 = \{A, B, C\}$, $\ell_2 = \{A, D, E\}$, $\ell_3 = \{A, G, F\}$, $\ell_4 = \{C, G, D\}$, $\ell_5 = \{C, F, E\}$, $\ell_6 = \{B, G, E\}$ e $\ell_7 = \{B, D, F\}$. Mostre que $(\pi, \mathcal{L})$ é uma geometria projetiva plana. (Verifique se valem todos os postulados.)

OBSERVAÇÃO. Observe-se que o postulado (GP2) *não* é satisfeito nos modelos da Geometria Analítica, da Geometria Hiperbólica, no plano de Moulton e no plano rasgado. Em cada uma dessas geometrias encontre exemplos de linhas sem pontos em comum. Também a na geometria esférica postulado (GP2) *não* é satisfeito, pois todo par de linhas distintas têm exatamente dois pontos em comum.

1.2. O Plano Projetivo

Partindo da Geometria Esférica, encontrada no Exercício 1.6, vamos agora estudar um objeto geométrico de grande importância: o plano projetivo.

Já observamos que na Geometria Esférica, pares de pontos antipodais são unidos por infinitas linhas distintas, e portanto o Postulado 1 das Geometrias de

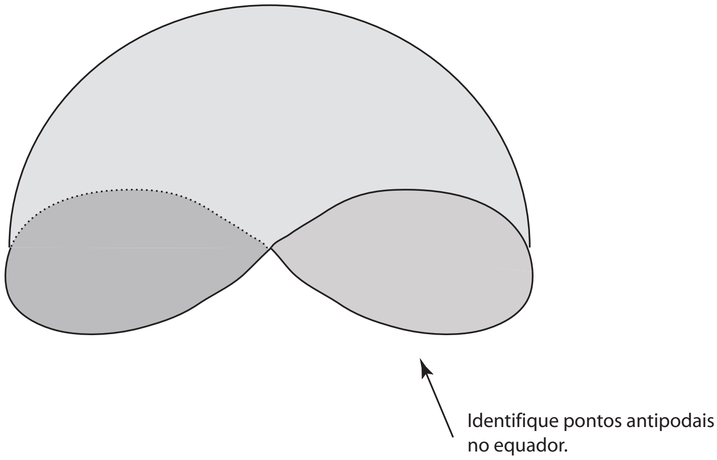

FIGURA 1.5. O plano projetivo

Incidência não é satisfeito. Para superar o problema, vamos definir um outro conjunto de pontos obtido "identificando" os pontos antipodais da esfera (Figura 1.5). Para formalizar essa idéia, usaremos a noção de *classes de equivalência* de uma relação.

Lembramos que, dado um conjunto X, uma *relação* em X é um subconjunto $\mathcal{R}$ do produto cartesiano $X \times X$; escrevemos $x \sim y$ se $x, y \in X$ são tais que $(x, y) \in \mathcal{R}$. A relação $\mathcal{R}$ é chamada *relação de equivalência* se valem as seguintes três propriedades:

- (reflexiva) cada par da forma (x, x), com $x \in X$, está contido em $\mathcal{R}$, i.e., $x \sim x$ para todo $x \in X$;
- (simétrica) se $(x, y) \in \mathcal{R}$, então $(y, x) \in \mathcal{R}$, i.e., $x \sim y$ se e só se $y \sim x$;
- (transitiva) se $(x, y), (y, z) \in \mathcal{R}$, então $(x, z) \in \mathcal{R}$, i.e., $x \sim y$ e $y \sim z$ implica $x \sim z$.

Dada uma relação de equivalência $\mathcal{R}$ em X e dado $x \in X$, chamamos de *classe de equivalência de* x o subconjunto $\mathcal{R}[x] \subset X$ definido por:

$$\mathcal{R}[x] = \big\{ y \in X : (x, y) \in \mathcal{R} \big\};$$

mais em geral, dado um subconjunto $A \subset X$, denotamos com $\mathcal{R}[A]$ o conjunto:

$$\mathcal{R}[A] = \big\{ y \in X : y \sim x \text{ por algum } x \in A \big\}.$$

Usando as propriedades das relações de equivalência, é un fácil exercício verificar as seguintes afirmações:

(1) $x \in \mathcal{R}[x]$ para todo x; em particular $\mathcal{R}[x] \neq \emptyset$.
(2) $x \in \mathcal{R}[y]$ implica $y \in \mathcal{R}[x]$.
(3) As classes de equivalência de $\mathcal{R}$ formam uma partição de X em subconjuntos *disjuntos*, i.e., dados $x, y \in X$, ou $\mathcal{R}[x] = \mathcal{R}[y]$ ou $\mathcal{R}[x] \cap \mathcal{R}[y] = \emptyset$.

Dada uma relação de equivalência $\mathcal{R}$ em X, o *quociente* $X/\mathcal{R}$ é definido como o conjunto das classes de equivalências de $\mathcal{R}$, i.e., os elementos de $X/\mathcal{R}$ são subconjuntos de X da forma $\mathcal{R}[x]$, por algum $x \in X$. Em outros termos, o quociente

$X/\mathcal{R}$ pode ser pensado como o conjunto obtido identificando os elementos equivalentes de X pela relação $\mathcal{R}$.

Com isso, estamos prontos para a definição do plano projetivo. Consideremos o conjunto $X = \mathbb{S}^2$ da superfície esférica de raio 1 centrada na orígem de $I\!R^3$, e definimos a seguinte relação de equivalência em X: $x \sim y$ se $x = y$ ou se $x = -y$. Observe-se que, se $x \in \mathbb{S}^2$, $-x$ é o *ponto antipodal* de x. A verifica que $\sim$ é uma relação de equivalência é muito simples; as classes de equivalência dessa relação consistem exatamente de dois pontos: $\mathcal{R}[x] = \{x, -x\}$. Chamamos esta relação de *relação de antipodalidade* em $\mathbb{S}^2$; se $x \in \mathbb{S}^2$, definimos $\mathfrak{p}(x) = \{-x, x\} \in \mathbb{P}^2$. A aplicação $\mathfrak{p} : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{P}^2$ é chamada de *aplicação quociente*.

DEFINIÇÃO. O *plano projetivo* $\mathbb{P}^2$ é o quociente de $\mathbb{S}^2$ pela relação de antipodalidade. As linhas em $\mathbb{P}^2$ são definidas como sendo os subconjuntos de $\mathbb{P}^2$ da forma:

$$\widetilde{\ell} = \mathfrak{p}(\ell) := \{\mathfrak{p}(x) : x \in \ell\},$$

onde ℓ é uma linha da geometria esférica, ou seja, ℓ é um círculo máximo de $\mathbb{S}^2$.

Observamos que dada uma linha $\widetilde{\ell}$ em $\mathbb{P}^2$, existe uma única linha ℓ em $\mathbb{S}^2$ tal que $\pi(\ell) = \widetilde{\ell}$; isso depende do fato que para toda linha ℓ em $\mathbb{S}^2$, $\mathcal{R}[\ell] = \ell$.

Vamos mostrar agora que o plano projetivo, munido da família de linhas descrita acima, é uma geometria projetiva plana.

Para verificar o Postulado 1, consideremos dois pontos distintos arbitrários P e Q no plano projetivo $\mathbb{P}^2$, isso é, $P = \{x, -x\}$ e $Q = \{y, -y\}$, onde $x, y \in \mathbb{S}^2$, e $x \neq \pm y$. Como x não coincide com y nem é antipodal ao y, então existe uma *única* linha ℓ da geometria esférica unindo x e y em $\mathbb{S}^2$; segue que $\mathcal{R}(\ell)$ é uma linha em $\mathbb{P}^2$ unindo P e Q. Se observe que toda linha em $\mathbb{S}^2$ passante por x contém também $-x$, e toda linha por y passa por $-y$; dessa observação segue que, de fato, $\mathcal{R}(\ell)$ é a única linha em $\mathbb{P}^2$ que contém P e Q.

Para verificar que na plano projetivo valem os Postulados 2 e (GP1), observamos que toda linha em $\mathbb{S}^2$ contém infinitos pontos dois a dois distintos e não antipodais. Por exemplo, todos os pontos de um semi-círculo máximo (tirando um dos extremos) são dois a dois distintos e não antipodais. Esse fato implica facilmente que toda linha no plano projetivo contém infinitos pontos distintos.

Deixamos como exercício para o leitor a verífica do Postulado 3 para o plano projetivo. Sugerimos a seguinte observação, a ser provada: se $x, y, z \in \mathbb{S}^2$ são pontos não colineares, então os pontos $P = \{x, -x\}$, $Q = \{y, -y\}$ e $S = \{z, -z\}$ são pontos não colineares em $\mathbb{P}^2$.

Finalmente, vamos verificar o postulado chave da geometria projetiva plana, o Postulado (GP2). Dadas duas linhas $\widetilde{\ell_1}$ e $\widetilde{\ell_2}$ em $\mathbb{P}^2$, então existem exatamente duas linhas ℓ_1 e ℓ_2 em $\mathbb{S}^2$ tais que $\mathcal{R}(\ell_1) = \widetilde{\ell_1}$ e $\mathcal{R}(\ell_2) = \widetilde{\ell_2}$. Se $\widetilde{\ell_1} \neq \widetilde{\ell_2}$, então $\ell_1 \neq \ell_2$, e portanto $\ell_1 \cap \ell_2$ consiste exatamente de dois pontos antipodais: x e $-x$. Segue que a interseção $\widetilde{\ell_1} \cap \widetilde{\ell_2}$ é dada pelo ponto $P = \{-x, x\}$.

Isso conclue a verificação dos axiomas da geometria projetiva plana.

1.3. Postulado da Régua. Exemplos

Agora vamos restringir mais nossas geometrias. Vamos impor que cada linha tem uma régua graduada, ou seja, a cada ponto da linha associaremos um número real (o número que aparece na régua, logo abaixo do ponto). Mais formalmente:

POSTULADO 4 (Postulado da Régua). *Para cada linha ℓ, existe (pelo menos) uma função $f : \ell \to I\!R$ bijetora, chamada de régua de ℓ (ou seja, f é uma regra que associa a cada ponto P de ℓ um único número real $f(P)$ e, dado um número real $r \in I\!R$, existe um único ponto Q de ℓ associado a r, $f(Q) = r$.)*

É como se as linhas fossem traçadas com uma régua graduada (talvez um pouco torta, dependendo da geometria). A ponta do lápis em cada instante estará em cima de um ponto de ℓ e o número que aparece na régua nesse lugar é o valor associado ao ponto.

Uma **geometria métrica** é uma geometria com régua graduada em que fizemos a escolha de uma régua para cada linha e usamos estas réguas para definir uma **distância** $d(P,Q) = |f(P) - f(Q)|$, sendo f a régua escolhida para a linha $\overleftrightarrow{PQ}$.

IMPORTANTE. *Daqui em diante, todas as geometrias consideradas serão métricas, ou seja, as réguas já foram previamente escolhidas e uma distância compatível determinada.*

EXERCÍCIO 1.8. Consideremos na geometria analítica uma reta ℓ de equação $ax + by = c$, escolhemos dois pontos arbitrários $P = (x_0, y_0)$ e $Q = (x_1, y_1)$ de ℓ tais que $\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} = 1$; qualquer outro ponto $R = (x, y)$ desta reta é determinado obtendo um número real t tal que $(x, y) = (x_0, y_0) + t(x_1 - x_0, y_1 - y_0)$. Neste caso, definimos $f(R)$ como o valor t obtido. No caso de $R = P$, temos que $t = 0$ e se $R = Q$, $t = 1$. Mostre que f é uma régua para ℓ.

Verifique que a distância entre os pontos $U = (u_1, v_1)$ e $V = (u_2, v_2)$ (definida a partir da régua) nesta geometria é

$$d(U, V) = d_E(U, V) = \sqrt{(u_2 - u_1)^2 + (v_2 - v_1)^2}.$$

SOLUÇÃO. Primeiro vamos mostrar que (x_2, y_2) da reta $ax + by = c$ existe um único t tal que $(x_2, y_2) = (x_0, y_0) + t(x_1 - x_0, y_1 - y_0)$. Com isto, obtemos um sistema linear de duas equações a uma incógnita t

$$\begin{cases} (x_1 - x_0)\,t &= x_2 - x_0 \\ (y_1 - y_0)\,t &= y_2 - y_0 \end{cases}$$

e precisamos mostrar que tem uma única solução. Como $P \neq Q$, então ou $x_1 \neq x_0$, ou $y_1 \neq y_0$. No primeiro caso, podemos isolar t da primeira equação, obtendo $t = (x_2 - x_0)/(x_1 - x_0)$. Daí, substituímos na segunda equação para ver se é um sistema possível de resolver; usando a equação da reta $ax + by = c$, como $x_1 \neq x_0$, a reta não pode ser vertical. Por isso, o coeficiente $b \neq 0$ e podemos isolar y em função de x, obtendo $y = (c - ax)/b$; assim temos que $y_2 = (c - ax_2)/b$ e $y_0 = (c - ax_0)/b$. Portanto, substituindo t na segunda equação, temos

$$(y_1 - y_0)t = (y_1 - y_0)\frac{(x_2 - x_0)}{(x_1 - x_0)} = (x_2 - x_0)\frac{(y_2 - y_0)}{(x_1 - x_0)} = -\frac{a}{b}(x_1 - x_0) = y_2 - y_0,$$

ou seja, o sistema é possível e determinado e portanto tem uma única solução. No caso em que $x_0 = x_1$, devemos ter que $y_0 \neq y_1$, e argumentamos de modo análogo.

Agora, dado $r \in I\!R$, precisamos mostrar que o ponto R de coordenadas $(x_3, y_3) = (x_0, y_0) + r(x_1 - x_0, y_1 - y_0)$ está na reta $ax + by = c$, ou seja,

$ax_3 + by_3 = c$. Substituindo x_3 por $x_0 + r(x_1 - x_0)$ e y_3 por $y_0 + r(y_1 - y_0)$, e usando o fato que P e Q estão nesta reta, temos:

$$\begin{aligned} ax_3 + by_3 &= a[x_0 + r(x_1 - x_0)] + b[y_0 + r(y_1 - y_0)] \\ &= (1-r)(ax_0 + by_0) + r(ax_1 + by_1) = (1-r)c + rc = c, \end{aligned}$$

ou seja, $R = (x_3, y_3)$ também está na reta.

Para verificar a fórmula da distância, sejam $r = f(U)$ e $s = f(V)$ os valores da régua correspondentes. Então $U = (u_1, v_1) = (x_0, y_0) + r(x_1 - x_0, y_1 - y_0)$ e $V = (v_1, v_2) = (x_0, y_0) + s(x_1 - x_0, y_1 - y_0)$ e $d(U, V) = |r - s|$. Subtraindo as duas equações, obtemos $(u_1 - v_1, u_2 - v_2) = (r - s)(x_1 - x_0, y_1 - y_0)$. Elevendo ao quadrado cada coordenada e somando as duas, temos $(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 = (r - s)^2[(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2] = (r - s)^2$, pois escolhemos P e Q de modo que $(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 = 1$; tirando as raízes quadradas, temos

$$d(U, V) = |r - s| = \sqrt{(r - s)^2} = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2}$$

que é o que queríamos mostrar.

EXERCÍCIO 1.9. A **Geometria do Taxista** tem o plano e as linhas da geometria analítica mas com as réguas definidas por $f(P) = y$ se ℓ é uma reta vertical (de equação $x = a$) e (a, y) são as coordenadas de P e $f(P) = (1 + |m|)x$ se ℓ for uma reta não vertical, de equação $y = mx + b$, e (x, y) forem as coordenadas de P. Verifique que nos dois casos f é realmente uma régua.

Verifique que $d(P, Q) = |x_1 - x_0| + |y_1 - y_0|$ nesta geometria, sendo $P = (x_0, y_0)$ e $Q = (x_1, y_1)$.

EXERCÍCIO 1.10. Na geometria hiperbólica, dada uma linha da forma $\ell_a = \{(x, y) \in \mathbb{H} : x = a\}$, defino $f(P) = \ln(y)$, sendo que (a, y) é a coordenada de P, e para uma linha da forma $\ell_{p,r} = \{(x, y) \in \mathbb{H} : (x - p)^2 + y^2 = r^2\}$, defino

$$f(P) = \ln\left(\frac{x - p + r}{y}\right),$$

sendo (x, y) as coordenadas de P. Mostre que em ambos os casos f é uma régua. No caso de $\ell_{p,r}$, dado o número real t, o ponto P tal que $f(P) = t$ tem coordenadas (x, y) com $x = p + r \operatorname{tgh}(t)$ e $y = r \operatorname{sech}(t)$, sendo que[1]

$$\operatorname{tgh}(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} \ \text{ e } \ \operatorname{sech} t = \frac{2}{e^t + e^{-t}}$$

Verifique que a distância nesta geometria é dada por $d(P, Q) = |\ln(d/b)|$ se P tem coordenadas (a, b) e Q tem coordenadas (a, d) (estão na mesma linha vertical) e por

$$d(P, Q) = \left|\ln\left(\frac{d(a - p + r)}{b(c - p + r)}\right)\right|,$$

se P tem coordenadas (a, b) e Q tem coordenadas (c, d), com $a \neq c$ (estão na mesma linha $\ell_{p,r}$).

[1] Mais informações sobre as funções hiperbólicas são encontradas na Apéndice B.

EXERCÍCIO 1.11. No plano de Moulton, definimos $f : \ell \to I\!R$ por $f(P) = y$ se ℓ é uma linha vertical (de equação $x = a$) e (a, y) são as coordenadas de P, f como na geometria analítica para $\ell_{m,b}$ com $m < 0$ e por

$$f(P) = \begin{cases} a\sqrt{1+4m^2} & \text{se } a < 0 \\ a\sqrt{1+m^2} & \text{se } a \geq 0, \end{cases}$$

sendo que P tem coordenadas (a, b) e está na linha quebrada

$$\ell^*_{m,b} = \big\{(x,y) \in I\!R^2 : y = 2mx + p \text{se } x < 0 \text{ e } y = mx + p \text{ se } x \geq 0\big\}, \quad m \geq 0.$$

Verifique que f é régua e, neste caso, a distância entre $P = (a, b)$ e $Q = (c, d)$ é

$$d(P,Q) = \begin{cases} d_E(P,(0,p)) + d_E((0,p),Q) & \text{se } ac < 0 \\ d_E(P,Q) & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

sendo que d_E é a distância da geometria analítica (ou euclideana). Observe que a condição $ac < 0$ significa que os pontos P e Q estão em lados opostos do eixo Oy.

EXERCÍCIO 1.12. No plano rasgado, definimos $f : \ell \to I\!R$ por $f(P) = y$ se ℓ é uma linha vertical (de equação $x = a$) e (a, y) são as coordenadas de P e por

$$f(P) = \begin{cases} a\sqrt{1+m^2} & \text{se } a < 0 \\ (a-1)\sqrt{1+m^2} & \text{se } a \geq 1, \end{cases}$$

sendo que P tem coordenadas (a, b) e está na linha quebrada

$$\big\{(x,y) \in I\!R^2 : y = mx + p \text{ e } x < 0 \text{ ou } x \geq 1\big\}.$$

Verifique que f é régua e, neste caso, a distância entre $P = (a, b)$ e $Q = (c, d)$ é

$$d(P,Q) = \begin{cases} d_E(P,(0,p)) + d_E((1,m+p),Q) & \text{se } a < 0 \text{ e } c \geq 1, \\ & \text{ou se } c < 0 \text{ e } a \geq 1 \\ & \\ d_E(P,Q) & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

sendo que d_E é a distância da geometria analítica (ou euclideana). Observe que as condições $a < 0$ e $c \geq 1$, ou $c < 0$ e $a \geq 1$ significam que os pontos P e Q estão em lados opostos da faixa $\{(x,y) \in I\!R^2 : 0 \leq x < 1\}$, retirada de $I\!R^2$.

1.4. Relação de Ordenação de Pontos

Numa geometria métrica, podemos estabelecer uma noção de ordem entre os pontos de cada linha, emprestada da régua correspondente. Sejam P, Qe R três pontos de uma linha ℓ e seja $f : \ell \to I\!R$ sua régua. Dizemos que $P - Q - R$ (Q **está entre** P e R) se $f(P) < f(Q) < f(R)$ ou $f(R) < f(Q) < f(P)$.

EXERCÍCIO 1.13. Mostre que numa geometria métrica, dada uma linha ℓ e sua régua $f : \ell \to I\!R$, então:

(a) se A é ponto de ℓ e $g, h : \ell \to I\!R$ são definidas por $g(P) = f(P) - f(A)$ e $h(P) = -f(P) + f(A)$, então g e h também são réguas de ℓ compatíveis com a distância;
(b) se $k : \ell \to I\!R$ é uma régua compatível com a distância, então existe um ponto A de ℓ tal que $k = g$ ou $k = h$ do item anterior;
(c) se $P - Q - R$ pela régua f então $P - Q - R$ por qualquer outra régua g de ℓ compatível com a distância.

SOLUÇÃO. (a) Temos que mostrar que se P e Q estão em ℓ, $d(P,Q) = |g(P)-g(Q)| = |h(P)-h(Q)|$. Sabemos que $d(P,Q) = |f(P)-f(Q)|$. Com isto, temos $|g(P) - g(Q)| = |[f(P) - f(A)] - [f(Q) - f(A)]| = |f(P) - f(Q)| = d(P,Q)$ e $|h(P) - h(Q)| = |[-f(P) + f(A)] - [-f(Q)+f(A)]| = |f(P)-f(Q)| = d(P,Q)$, como queríamos mostrar.

(b) Seja A em ℓ tal que $k(A) = 0$. Então, para cada ponto P de ℓ, $d(A,P) = |k(P) - k(A)| = |k(P)| = |f(P) - f(A)|$. Tirando os módulos, ou $k(P) = f(P) - f(A) = g(P)$ ou $k(P) = -[f(P) - f(A)] = h(P)$, como queríamos mostrar. (O aluno deve completar esta demonstração mostrando que se uma das fórmulas vale para um ponto distinto de A, então ela vale para todos os pontos.)

(c) Suponhamos que $f(P) < f(Q) < f(R)$. Então, dado um ponto A de ℓ e subtraindo o número real $f(A)$ de cada termo, temos $f(P) - f(A) < f(Q)-f(A) < f(R)-f(A)$, ou seja $g(P) < g(Q) < g(R)$; se multiplicarmos por -1, invertemos as desigualdades, obtendo $-f(R) + f(A) < -f(Q) + f(A) < -f(P) + f(A)$, ou seja $h(R) < h(Q) < h(P)$. Em ambos os casos, permanece a relação $P - Q - R$, como queríamos mostrar.

EXERCÍCIO 1.14. Dados A e B dois pontos distintos de uma linha ℓ, mostre que existe uma régua f de ℓ tal que $f(A) = 0$ e $f(B) > 0$.

EXERCÍCIO 1.15. Mostre que se P, Q e R são pontos distintos de uma linha ℓ, então:

(a) Se $P - Q - R$ então $R - Q - P$;
(b) Exatamente um dos casos ocorre: $P-Q-R$, ou $P-R-Q$, ou $Q-P-R$;
(c) se $P - Q - R$ e $Q - R - S$, então $P - Q - S$ e $P - R - S$;
(d) $P - Q - R$ se, e somente se, $d(P,R) = d(P,Q) + d(Q,R)$.

SOLUÇÃO. (a) Se $P - Q - R$, então $f(P) < f(Q) < f(R)$ ou $f(R) < f(Q) < f(P)$ para a régua de ℓ. Mas isto também se aplica para $R - Q - P$.

(b) sendo os três pontos distintos, os valores $f(P)$, $f(Q)$ e $f(R)$ são distintos; estes admitem uma única ordem em $\mathbb{R}$; se $f(P) < f(Q) < f(R)$ ou $f(R) < f(Q) < f(P)$, então nehuma das desigualdades restantes são possíveis: nem $f(Q) < f(R) < f(P)$, nem $f(P) < f(R) < f(Q)$, nem $f(R) < f(P) < f(Q)$ e nem $f(Q) < f(P) < f(R)$.

(c) se $P - Q - R$ e $f(P) < f(Q) < f(R)$, como $Q - R - S$, a única possibilidade é $f(Q) < f(R) < f(S)$ e portanto $f(P) < f(Q) < f(R) < f(S)$, donde decorre que $P - Q - S$ e $P - R - S$; se $f(R) < f(Q) < f(P)$, como $Q-R-S$, a única possibilidade é $f(S) < f(R) < f(Q)$ e portanto $f(S) < f(R) < f(Q) < f(P)$, donde novamente decorre que $P - Q - S$ e $P - R - S$.

(d) se $P-Q-R$, então $f(P) < f(Q) < f(R)$, donde decorrem as desigualdades $0 < f(Q)-f(P) < f(R)-f(P)$ e $0 < f(R)-f(Q)$, e $d(P,R) = |f(P)-f(R)| = f(R)-f(P) = f(R)-f(Q)+f(Q)-f(P) = |f(R)-f(Q)|+|f(Q)-f(P)| = d(P,Q)+d(Q,R)$; ou $f(R) < f(Q) < f(P)$, donde decorrem as desigualdades $0 < f(Q) - f(R) < f(P) - f(R)$ e $0 < f(P) - f(Q)$ e $d(P,R) = |f(P) - f(R)| = f(P) - f(R) =$

$f(P) - f(Q) + f(Q) - f(R) = |f(P) - f(Q)| + |f(Q) - f(R)| = d(P,Q) + d(Q,R)$, como queríamos mostrar.

Para a recíproca, suponhamos que $d(P,R) = d(P,Q) + d(Q,R)$. Como os três pontos são distintos, as únicas ordens comp-atíveis com tal fórmula são $f(P) < f(Q) < f(R)$ ou $f(R) < f(Q) < f(P)$, pois, por exemplo, se $f(R) < f(P) < f(Q)$, então $d(P,R) = f(P) - f(R) < f(Q) - f(R) = d(Q,R) < d(Q,R) + d(P,Q)$. (Verifique as outras possibilidades.)

EXERCÍCIO 1.16. Mostre que dados dois pontos distintos A e B numa linha ℓ, existem pontos C, D e E de ℓ tais que $C - A - D$ e $D - B - E$. (Use uma régua de ℓ para obter tais pontos.)

EXERCÍCIO 1.17. Verifique que se $P = (-3,3)$, $Q = (1,5)$ e $R = (4,4)$ estão em $\mathbb{H}$, então $P - Q - R$ na geometria hiperbólica.

EXERCÍCIO 1.18. Verifique que se $P = (-1,-3)$, $Q = (0,-1)$ e $R = (1,0)$ então $P - Q - R$ no plano de Moulton. (Ache $m > 0$ e $b \in I\!R$ tais que estes pontos estejam na linha $\ell^*_{m,b}$.)

Dados dois pontos distintos A e B, seja ℓ a linha que os contém. Definimos a **semi-reta** $\overrightarrow{AB}$ como sendo o conjunto $\{P \in \ell$: não vale $P - A - B\}$ e o **segmento** $\overline{AB}$ como o conjunto $\{P \in \ell : P = A$, ou $P = B$, ou $A - P - B\}$. Observe que $\overrightarrow{AB} = \{P \in \ell : P = A$, ou $A - P - B$, ou $P = B$, ou $A - B - P\}$.

EXERCÍCIO 1.19. Mostre que se A e B são pontos distintos em uma linha ℓ, mostre que existe uma régua f de ℓ tal que $\overrightarrow{AB} = \{P \in \ell : f(P) \geq 0\}$.

EXERCÍCIO 1.20. Mostre que se A e B são pontos distintos, então:

(a) $\overline{AB} = \overline{BA}$;
(b) $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BA}$;
(c) $\overline{AB} = \overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA}$;
(d) se $C \in \overrightarrow{AB}$ e $C \neq A$, então $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$;
(e) se $C - A - B$ então $\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{AC}$ é o ponto A.

SOLUÇÃO. (a) Observe que $A - P - B$ é o mesmo que $B - P - A$. Olhe para a definição de segmento.

(b) Mostre que existe um ponto C em $\overrightarrow{AB}$ mas não em $\overrightarrow{BA}$. Sabemos que existe C tal que $A - B - C$ (por quê?). Mostre que tal C serve.
(c) Escreva o que significa P estar em $\overline{AB}$ e o que significa P estar em cada uma das semi-retas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BA}$.
(d) Escreva o que significa P estar em cada uma das semi-retas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ e mostre que se está em uma, tem que estar na outra, e vice-versa.
(e) Novamente, escreva o que significa P estar em cada uma das semi-retas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$.

1.5. Congruência de Segmentos

Outra noção importante numa geometria métrica é a de **congruência de segmentos**: dizemos que $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ (o segmento $\overline{AB}$ é congruente ao segmento $\overline{CD}$) se $d(A,B) = d(C,D)$.

EXERCÍCIO 1.21. Mostre que $d(A,B) \geq 0$ e $d(A,B) = 0$ se, e só se, $A = B$.

SOLUÇÃO. Seja f uma régua numa linha ℓ contendo A e B. Então $d(A,B) = |f(B) - f(A)| \geq 0$ (por definição de valor absoluto). Se $d(A,B) = 0$, então $f(A) = f(B)$ e, como f é uma função bijetora, isto implica que $A = B$. Reciprocamente, se $A = B$, então $f(A) = f(B)$ e, portanto $d(A,B) = 0$.

EXERCÍCIO 1.22. Mostre que $\equiv$ é uma **relação de equivalência** no conjunto de todos os segmentos, ou seja, mostre que valem as três propriedades reflexiva, simétrica e transitiva (lembre a definição na página 5):

(a) $\overline{AB} \equiv \overline{AB}$;
(b) se $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ então $\overline{CD} \equiv \overline{AB}$;
(c) se $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ e $\overline{CD} \equiv \overline{EF}$, então $\overline{AB} \equiv \overline{EF}$.

SOLUÇÃO. Use a definição de $\equiv$ e as propriedades da igualdade.

EXERCÍCIO 1.23. Mostre que se A e B são dois pontos distintos, então existe um único ponto C tal que $A - C - B$ e $\overline{AC} \equiv \overline{CB}$ (isto é, C é o ponto médio de $\overline{AB}$.

SOLUÇÃO. Basta tomar uma régua f tal que $f(A) < f(B)$ e tomar o ponto C na linha $\overleftrightarrow{AB}$ tal que $f(C) = (f(A) + f(B))/2$. (Por quê existe tal f e tal ponto C?)

EXERCÍCIO 1.24. Mostre que se A e B são dois pontos distintos, então existem pontos C, D e E tais que $A - C - D$, $D - E - B$, e $\overline{AC} \equiv \overline{CD} \equiv \overline{DE} \equiv \overline{EB}$.

EXERCÍCIO 1.25. Mostre que dados A e B distintos e um segmento $\overline{CD}$, então existe um único ponto P em $\overrightarrow{AB}$ tal que $\overline{AP} \equiv \overline{CD}$.

EXERCÍCIO 1.26. Mostre que dados A e B distintos e um segmento $\overline{CD}$, então existem exatamente dois pontos P e Q em $\overleftrightarrow{AB}$ tais que $\overline{AP} \equiv \overline{CD}$ e $\overline{AQ} \equiv \overline{CD}$. (Nos dois lados de A.)

EXERCÍCIO 1.27. Mostre que dados A e B distintos e um segmento $\overline{CD}$, então:

(a) **(Soma de segmentos)** existe um único ponto P em $\overrightarrow{AB}$ tal que $A - B - P$ e $\overline{BP} \equiv \overline{CD}$. (Podemos dizer que $\overline{AP}$ é a soma do segmento $\overline{AB}$ com $\overline{CD}$.)
(b) **(Diferença de segmentos)** existe um único ponto P em $\overrightarrow{BA}$ tal $\overline{BP} \equiv \overline{CD}$. (Podemos dizer que $\overline{AP}$ é a diferença entre os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$.)
(c) Mostre que dados A e B distintos e um segmento $\overline{CD}$, existe uma régua f de $\overleftrightarrow{AB}$ tal que $f(A) = 0$, $f(B) > 0$ e $f(P) = f(B) + d(C,D)$, no caso da soma dos segmentos e $f(P) = f(B) - d(C,D)$, no caso da diferença dos segmentos.

SOLUÇÃO. Ache primeiro a régua f tal que $f(A) = 0$ e $f(B) > 0$ (exercício anterior) e mostre que os pontos P tais que $f(P) = f(B) + d(C,D)$ ou $f(P) = f(B) - d(C,D)$ resolvem o problema.

Dados três pontos não colineares A, B e C, definimos o **ângulo** $\angle ABC$ como o conjunto $\overrightarrow{BA} \cup \overrightarrow{BC}$. O ponto B é o **vértice do ângulo**.

EXERCÍCIO 1.28. Dados três pontos não colineares A, B e C, mostre que

(a) $\angle ABC = \angle CBA$;
(b) $\angle ACB \neq \angle ABC$ e $\angle BAC \neq \angle ABC$;

(c) se P está em $\overrightarrow{BA}$, $P \neq B$ e Q em $\overrightarrow{BC}$, $Q \neq B$, então $\angle ABC = \angle PBQ$.

SOLUÇÃO. (a) $\angle ABC = \overrightarrow{BA} \cup \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC} \cup \overrightarrow{BA} = \angle CAB$;

(b) $\angle ABC = \overrightarrow{BA} \cup \overrightarrow{BC} \neq \overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{AC} = \angle BAC$, etc.

(c) decorrem do fato que $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BP}$ e $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BQ}$.

1.6. Postulado de Separação do plano

Vamos introduzir agora mais um postulado que restringirá mais as geometrias permitidas. Para isto precisamos definir alguns conceitos.

Um conjunto A do plano é **convexo** se, para todos os pares de pontos P e Q em A, o segmento $\overline{PQ}$ está todo contido em A.

EXERCÍCIO 1.29. Mostre que a interseção de dois conjuntos convexos é um conjunto convexo.

SOLUÇÃO. Sejam A e B convexos. Para mostrar que $A \cap B$ é convexo, precisamos tomar dois pontos arbitrários P e Q na interseção $A \cap B$ e mostrar que todos os pontos do segmento $\overline{PQ}$ estão nesta interseção.

Se $P, Q \in A \cap B$, então $P, Q \in A$ e, portanto, todos os pontos de $\overline{PQ}$ estão em A; mas $P, Q \in B$ também, portanto todos os pontos do segmento $\overline{PQ}$ estão em B. Portanto $\overline{PQ}$ está contido em $A \cap B$.

EXERCÍCIO 1.30. Mostre que são conjuntos convexos:

(a) o plano todo e o conjunto vazio;
(b) uma linha ℓ;
(c) uma semi reta $\overrightarrow{AB}$;
(d) uma semi reta $\overrightarrow{AB}$ menos seu vértice A;
(e) um segmento $\overline{AB}$;
(f) o interior do segmento $\overline{AB}$ (isto é, o segmento menos os pontos A e B).

POSTULADO 5 (Postulado de Separação do plano). *Dada uma linha ℓ, existem conjuntos H_1 e H_2 (chamados de* **lados de** *ℓ) tais que:*

(a) *H_1 e H_2 são convexos;*
(b) *$H_1 \cap \ell = \varnothing$, $H_2 \cap \ell = \varnothing$ e $H_1 \cap H_2 = \varnothing$ e cada ponto do plano está em H_1, ou em H_2 ou em ℓ;*
(c) *se $P \in H_1$ e $Q \in H_2$ então o segmento $\overline{PQ}$ intersecta a linha ℓ num ponto R.*

EXERCÍCIO 1.31. Mostre que numa geometria métrica satisfazendo o postulado da separação do plano os conjuntos H_1 e H_2 não são vazios.

SOLUÇÃO. Observe que o postulado não garante que H_1 e H_2 não sejam vazios; o item (c) apenas diz que se existirem pontos $P \in H_1$ e $Q \in H_2$ então etc. Para mostrarmos que existem tais pontos precisamos apelar para o postulado 3, que diz que existem pelo menos três pontos não colineares. Isto implica que deve existir pelo menos um ponto A fora de ℓ. Então A deve estar em H_1 ou H_2. Digamos que esteja em H_1. Precisamos mostrar que existe pelo menos um ponto em H_2. Para isto, seja $B \in \ell$ um ponto qualquer e seja $C \in \overleftrightarrow{AB}$ tal que $A - B - C$ (tal ponto existe pelo postulado da régua). Como $A \notin \ell$, $\ell \neq \overleftrightarrow{AB}$ e portanto $C \notin \ell$.

Como o segmento $\overline{AC}$ encontra ℓ no ponto B e sendo H_1 convexo, $C \notin H_1$. Portanto $C \in H_2$, ou seja $H_2 \neq \varnothing$.

EXERCÍCIO 1.32. Mostre que nas geometrias analítica, hiperbólica, do taxista e do plano de Moulton vale o postulado da separação do plano.

SOLUÇÃO. Para cada uma delas, dada uma linha ℓ, verifique que ela separa o plano em dois conjuntos H_1 e H_2; mostre que estes conjuntos são convexos; mostre que vale sempre o item (c).

Este postulado tem conseqüências importantes. Para expô-las, definiremos algumas **figuras geométricas**. Um triângulo é um conjunto $\triangle ABC = \overline{AB} \cup \overline{AC} \cup \overline{BC}$, a união de três segmentos determinados por três pontos A, B e C não colineares, chamados de **vértices**. Cada segmento $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ é um **lado** do triângulo. Um **quadrilátero** é um conjunto $\square ABCD = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CD} \cup \overline{DA}$, a união dos quatro segmentos determinados pelos pontos A, B, C e D (seus **vértices**), três a três não colineares. Cada segmento $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$ é um **lado** do quadrilátero e os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ são suas **diagonais**. Mais geralmente, um **polígono** $A_1A_2 \ldots A_n = \overline{A_1A_2} \cup \ldots \overline{A_{n-1}A_n} \cup \overline{A_nA_1}$, e cada um destes segmentos é um de seus lados e cada ponto A_i ($1 \leq i \leq n$) seu **vértice**.

EXERCÍCIO 1.33. Mostre que os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle ACB$ são iguais, mas os quadriláteros $\square ABCD$ e $\square ACBD$ não são iguais, ou seja, se o polígono tem mais de três vértices, a ordem destes vértices é importante ao escrever $A_1A_2 \ldots A_n$.

EXERCÍCIO 1.34. Mostre que se vale o postulado da separação do plano:

(a) dada uma linha ℓ e dois pontos distintos $A, B \notin \ell$, se $\overline{AB}$ intersecta ℓ, i.e., se $\overline{AB} \cap \ell \neq \emptyset$, então A e B ficam em lados opostos de ℓ.
(b) dado o $\triangle ABC$, se ℓ é uma linha que intersecta o lado $\overline{AB}$, mas $A \notin \ell$ e $B \notin \ell$, então ℓ intersecta (pelo menos) um dos outros dois lados;
(c) dado o $\triangle ABC$, se ℓ é uma linha que intersecta o lado $\overline{AB}$, $A \notin \ell$, $B \notin \ell$, $C \notin \ell$ e ℓ intersecta $\overline{AC}$ então ℓ não intersecta $\overline{BC}$.

SOLUÇÃO. (b) Sejam H_1 e H_2 os lados de ℓ. Como o segmento $\overline{AB}$ intersecta ℓ e $A, B \notin \ell$, então A e B estão em lados opostos de ℓ. Podemos ter três situações: ou $C \in \ell$ e, neste caso $\overline{AC}$ intersecta ℓ, ou A e C estão em lados opostos de ℓ e, também neste caso ℓ intersecta $\overline{AC}$, ou A e C estão do mesmo lado de ℓ e, portanto B e C estão em lados opostos de ℓ e, portanto, ℓ intersecta o lado $\overline{BC}$.

(c) Suponhamos que ℓ intersecte os três lados do $\triangle ABC$, sem passar pelos seus vértices. Sejam $P \in \overline{AB}$, $Q \in \overline{AC}$ e $R \in \overline{BC}$ os pontos de interseção de ℓ com o $\triangle ABC$. Podemos ter três casos, $P - Q - R$, ou $P - R - Q$, ou $Q - P - R$. Vamos apenas considerar o caso em que $P - Q - R$, deixando os outros como exercício. Então os pontos A, P e R estão do mesmo lado de $\overleftrightarrow{BC}$, pois, se A e P estivessem de lados opostos, o segmento $\overline{AP}$ encontraria $\overleftrightarrow{BC}$ e o único ponto em que isto ocorreria só pode ser B. Mas isto implicaria que $A - B - P$, contradizendo o fato de que $P \in \overline{AB}$. O mesmo tipo de raciocínio garante que R e A também não podem estar em lados opostos de $\overleftrightarrow{BC}$. Como cada lado de $\overleftrightarrow{BC}$ é convexo e P e R estão do mesmo lado, o segmento $\overline{PR}$ não poderia encontrar a linha $\overleftrightarrow{BC}$ no ponto Q. Esta contradição termina a prova.

EXERCÍCIO 1.35. Mostre que a geometria do plano rasgado não vale o postulado da separação do plano.

SOLUÇÃO. Use o exercício anterior, obtendo um triângulo $\triangle ABC$ e uma linha ℓ que não intersecta seus vértices, mas intersecta apenas um de seus lados.

Vamos introduzir um postulado para uma geometria métrica:

> POSTULADO 6 (Postulado de Pasch). *Dados uma linha ℓ e um triângulo $\triangle ABC$, se $D \in \ell$ é um ponto tal que $A - D - B$, então ℓ intersecta $\overline{AC}$ ou ℓ intersecta $\overline{BC}$.*

EXERCÍCIO 1.36. Mostre que numa geometria métrica o postulado de separação do plano é *equivalente* ao postulado de Pasch.

SOLUÇÃO. Já provamos que se vale o postulado da separação do plano, então vale também o postulado de Pasch. Vamos mostrar que se vale o postulado de Pasch, então vale também o postulado da separação do plano. Alguns detalhes serão deixados aos leitores.

Suponha (b). Seja $P \notin \ell$ (que existe pelo postulado 3) e definimos $H_1 = \{Q : Q = P \text{ ou } \overline{PQ} \cap \ell = \varnothing\}$ e $H_2 = \{Q : Q \notin \ell \text{ e } \overline{PQ} \cap \ell \neq \varnothing\}$. Então $H_1 \cap H_2 = H_1 \cap \ell = H_2 \cap \ell = \varnothing$, e todo ponto do plano ou está em ℓ ou em H_1 ou em H_2. Falta mostrar que H_1 e H_2 são convexos e que dados $A \in H_1$ e $B \in H_2$, o segmento $\overline{AB}$ intersecta ℓ.

Vamos mostrar que H_1 é convexo. Para isto, sejam $A, B \in H_1$, $A \neq B$, e suponhamos que $A \neq P$ e $B \neq P$ (os casos em que $A = P$ ou $B = P$ ficam para os leitores). Queremos mostrar que todos os pontos de $\overline{AB}$ estão em H_1. Se A, B e P estão numa mesma linha $\overleftrightarrow{AB}$, então ou $A - B - P$ ou $A - P - B$ ou $B - A - P$. Mostre que em nenhum destes casos, $\overline{AB}$ pode ter ponto nem de H_2 e nem de ℓ. Se A, B e P não são colineares, seja $D \in \overline{AB}$ tal que $A - D - B$. Sabemos que ℓ não intersecta nem $\overline{AP}$ e nem $\overline{BP}$ (por quê?). Se $D \in \ell$ então ℓ intersectaria $\overline{AB}$, e por Pasch, deveria intersectar $\overline{AP}$ ou $\overline{BP}$. Portanto $D \notin \ell$. Se $D \in H_2$, então ℓ intersecta $\overline{DP}$. Por Pasch, aplicado aos triângulos $\triangle ADP$ e $\triangle BDP$, teríamos que ℓ intersectaria $\overline{AP}$ ou $\overline{BP}$ (por quê?), uma contradição. Portanto, todos os pontos de $\overline{AB}$ estão em H_1.

Vamos mostrar agora que H_2 é convexo. Para isto, sejam $A, B \in H_2$, $A \neq B$. Precisamos mostrar que todos os pontos de $\overline{AB}$ estão em H_2. Novamente temos dois casos, a saber, A, B e P são colineares. Então ou $A - B - P$ ou $B - A - P$. (Mostre que não pode ocorrer $A - P - B$.) Se $A - B - P$, pela definição de H_2 existe um ponto $R \in \ell \cap \overline{BP}$, tal que $B - R - P$. Como $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{BP}$, o único ponto de encontro de ℓ com $\overleftrightarrow{AB}$ é R. Como $A - B - R$, os pontos de $\overline{AB}$ estão todos em H_2 (por quê?). Suponhamos agora que A, B e P sejam não colineares. Consideremos o triângulo $\triangle ABP$. Pela definição de H_2, ℓ intersecta ambos os lados $\overline{AP}$, no ponto R e $\overline{BP}$, no ponto S. Vamos mostrar que nenhum ponto de $\overline{AB}$ pode estar em ℓ. Seja $T \in \overline{AB}$, $A - T - B$. Se $T \in \ell$, podemos ter $R - S - T$, $R - T - S$ ou $S - R - T$. Vamos considerar o caso $R - S - T$, deixando os outros dois para os leitores. Consideremos o $\triangle ART$, com a linha $\overleftrightarrow{BP}$; temos que $\overleftrightarrow{BP} \neq \overleftrightarrow{AT} = \overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{BP} \neq \overleftrightarrow{AR} = \overleftrightarrow{AP}$ (pois A, B e P não são colineares); portanto $\overleftrightarrow{BP}$ não encontra nem $\overline{AR}$ e nem $\overline{AT}$ (por quê?); como encontra $\overline{RT}$ no ponto

S, temos uma contradição ao postulado de Pasch. Aplicando Pasch aos triângulos $\triangle ATP$ e $\triangle TBP$, temos que $\overline{TP}$ intersecta ℓ (por quê?) e, portanto $T \in H_2$, pela definição de H_2. Portanto H_2 é convexo.

Agora sejam $A \in H_1$ e $B \in H_2$. Precisamos mostrar que $\overline{AB}$ intersecta ℓ num ponto R. Se $A = P$, pela definição de H_2, $\overline{AB} = \overline{PB}$ intersecta ℓ. Se A, B e P não são colineares, como $\overline{BP}$ intersecta ℓ e $\overline{AP}$ não intersecta ℓ (por quê?), por Pasch no triângulo $\triangle ABP$, $\overline{AB}$ intersecta ℓ num ponto R, como queríamos. Se A, B e P são colineares, como $\overline{BP}$ intersecta ℓ (pela definição de H_2), seja R este ponto em comum. Temos que $B - R - P$ e, como $A \in \overleftrightarrow{BP}$, $A \in H_1$, $A \neq P$, $A \neq R$ e $A \neq B$, temos que, ou $P - R - A$ (que não pode ocorrer, pois $A \in H_1$, que é convexo), ou $P - A - R$, ou $A - P - R$, o que implica que $\overline{AB}$ encontra ℓ em R, como queríamos.

IMPORTANTE. *Daqui em diante assumimos que as geometrias consideradas são geometrias métricas que satisfazem o postulado da separação do plano. Estas geometrias são chamadas de* **Geometrias de Pasch**.

EXERCÍCIO 1.37. Dado o $\triangle ABC$ e pontos D e E, tais que $B - C - D$ e $A - E - C$, mostre que existe um ponto $F \in \overleftrightarrow{DE}$, tal que $A - F - B$ e $D - E - F$.

EXERCÍCIO 1.38. Dado o $\triangle ABC$ e pontos D e F, tais que $B - C - D$ e $A - F - B$, mostre que existe um ponto $E \in \overleftrightarrow{DF}$, tal que $A - E - C$ e $D - E - F$.

EXERCÍCIO 1.39. Dado o $\triangle ABC$ e pontos D e E, tais que $B - E - C$ e $A - D - B$, mostre que $\overleftrightarrow{AE}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ se intersectam.

1.7. Interiores e o Teorema das Barras Cruzadas

O resultado mais útil que é uma conseqüência do postulado da separação do plano é o chamado Teorema das Barras Cruzadas. Ele permite provar que diagonais de quadriláteros, ou duas medianas de um triângulo, etc, se intersectam. Para prová-lo, precisamos de alguns conceitos e resultados preliminares.

Definimos o **interior de uma semi reta** $\overrightarrow{AB}$ como o conjunto $\mathsf{int}\,(\overrightarrow{AB})$ dos pontos $P \in \overrightarrow{AB}$ tais que $P \neq A$ (a semi reta menos o vértice); **interior de um segmento** $\overline{AB}$ como o conjunto $\mathsf{int}\,(\overline{AB})$ dos pontos $P \in \overline{AB}$ tais que $P \neq A$ e $P \neq B$; e o **interior do ângulo** $\angle AOB$ como o conjunto $\mathsf{int}\,(\angle AOB)$ obtido pela interseção $H_1 \cap \overline{H}_1$, sendo H_1 o lado de $\overleftrightarrow{OB}$ contendo A e $\overline{H}_1$ o lado de $\overleftrightarrow{OA}$ contendo B.

EXERCÍCIO 1.40. Mostre que se $\angle AOB = \angle CPD$ então $O = P$ e $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{PC}$ e $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{PD}$, ou $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{PD}$ e $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{PC}$. Mostre também que, se $\mathsf{int}\,(\angle AOB) = \mathsf{int}\,(\angle CPD)$, então $\angle AOB = \angle CPD$.

EXERCÍCIO 1.41. Mostre que se $\angle AOB = \angle CPD$ então o $\mathsf{int}\,(\angle AOB) = \mathsf{int}\,(\angle CPD)$.

EXERCÍCIO 1.42. Seja W um conjunto não vazio e convexo do plano e ℓ uma linha não encontrando W. Mostre que todos os pontos de W estão do mesmo lado de ℓ.

EXERCÍCIO 1.43. Mostre que, dados $A \in \ell$ e $B \notin \ell$ dois pontos, então todos os pontos de $\mathsf{int}\,(\overrightarrow{AB})$ estão do mesmo lado de ℓ.

EXERCÍCIO 1.44. Dados $A \neq B$, C e D em lados opostos de $\overleftrightarrow{AB}$, mostre que $\overrightarrow{AC}$ não intersecta $\overrightarrow{BD}$.

SOLUÇÃO. Todos os pontos do interior de $\overrightarrow{AC}$ estão do mesmo lado de $\overleftrightarrow{AB}$ que C (por quê?); todos os pontos ponto do interior de $\overrightarrow{BD}$ estão do mesmo lado de $\overleftrightarrow{AB}$ que D (por quê?), que é oposto a C. Portanto as semi retas não se encontram (por quê?).

EXERCÍCIO 1.45. Mostre que $P \in \mathsf{int}\,(\angle AOB)$ se, e somente se, A e P estão do mesmo lado de $\overleftrightarrow{OB}$ e P e B estão do mesmo lado de $\overleftrightarrow{OA}$.

EXERCÍCIO 1.46. Dado o $\triangle ABC$, mostre que se $A - P - C$, então $P \in \mathsf{int}\,(\angle ABC)$ e $\mathsf{int}\,(\overline{AB})$ está contido em $\mathsf{int}\,(\angle ABC)$.

EXERCÍCIO 1.47 (**O Teorema das Barras Cruzadas**). Se $P \in \mathsf{int}\,(\angle ABC)$ então $\overrightarrow{BP}$ intersecta $\overline{AC}$ num único ponto F com $A - F - C$.

SOLUÇÃO. Seja E tal que $E - B - C$ (tal ponto existe pelo postulado da régua). A linha $\overleftrightarrow{BP}$ cruza o lado $\overline{EC}$ do triângulo $\triangle ACE$ pelo ponto B. Portanto deve cruzar outro lado deste triângulo. Os interiores das semi retas $\overrightarrow{BP}$ e $\overrightarrow{AE}$ estão em lados opostos de $\overleftrightarrow{AB}$, portanto não se encontram. Seja Q um ponto tal que $P - B - Q$. Então A e Q estão em lados opostos de $\overleftrightarrow{BC} = \overleftrightarrow{EC}$ (por quê?). Portanto as semi-retas $\overrightarrow{BQ}$ e $\overrightarrow{EA}$ não se encontram. Isto é, a linha $\overleftrightarrow{BP}$ não intersecta o segmento $\overline{AE} = \overrightarrow{AE} \cap \overrightarrow{EA}$. Portanto existe um único ponto $F \in \overline{AC} \cap \overleftrightarrow{BP}$. Temos que $F \neq A$, pois $\overleftrightarrow{BP}$ não intersecta $\overline{AB}$ e $F \neq C$, pois B, P e C não são colineares (por quê isto implica que $F \neq C$?). Portanto $A - F - C$. Só falta mostrar que $F \in \overrightarrow{BP}$. Mas isto decorre do fato que P e Q estão em lados opostos de $\overleftrightarrow{BC}$ e A e P estão do mesmo lado de $\overleftrightarrow{BC}$ (por quê?).

O **interior do triângulo** $\triangle ABC$ é o conjunto $\mathsf{int}\,(\triangle ABC) = H_1 \cap \overline{H}_1 \cap \tilde{H}_1$, sendo que H_1 é o lado de $\overleftrightarrow{BC}$ contendo A, $\overline{H}_1$ é o lado de $\overleftrightarrow{AC}$ contendo B e $\tilde{H}_1$ é o lado de $\overleftrightarrow{AB}$ contendo C. Um quadrilátero $\square ABCD$ é um **quadrilátero convexo** se A e B estão do mesmo lado de $\overleftrightarrow{CD}$, B e C estão do mesmo lado de $\overleftrightarrow{AD}$, C e D estão do mesmo lado de $\overleftrightarrow{AB}$ e A e D estão do mesmo lado de $\overleftrightarrow{BC}$. Um **polígono convexo** é definido de modo análogo (todos os outros vértices deverão estar do mesmo lado de $\overleftrightarrow{A_iA_j}$, se $1 \leq i < j = i + 1 \leq n$ ou $i = n$ e $j = 1$).

EXERCÍCIO 1.48. Dados $\triangle ABC$ e pontos D, E e F, tais que $B - C - D$, $A - E - C$ e $B - E - F$, mostre que $F \in \mathsf{int}\,(\angle ACD)$.

EXERCÍCIO 1.49. Mostre que se $A - D - B$ e C e E estão do mesmo lado de $\overleftrightarrow{AB}$, então ou $\overrightarrow{DE} \cap \overline{AC} \neq \varnothing$, ou $\overrightarrow{DE} \cap \overline{BC} \neq \varnothing$.

EXERCÍCIO 1.50. Dados $\angle ABC$ e um ponto P, mostre que se a interseção $\overrightarrow{BP} \cap \mathsf{int}\,(\overline{AC}) \neq \varnothing$, então $P \in \mathsf{int}\,(\angle ABC)$. (Uma recíproca das Barras Cruzadas.)

EXERCÍCIO 1.51. Mostre que se $\ell \cap \mathsf{int}\,(\triangle ABC) \neq \varnothing$ então ℓ encontra $\triangle ABC$ em exatamente dois pontos.

EXERCÍCIO 1.52. Mostre que um quadrilátero $\square ABCD$ é convexo se, e somente se, cada vértice está no interior do ângulo oposto. (Por exemplo, A está no interior de $\angle BCD$, etc.)

EXERCÍCIO 1.53. Mostre que as diagonais de um quadrilátero convexo se intersectam.

EXERCÍCIO 1.54. Prove a recíproca, ou seja, se as diagonais de um quadrilátero se intersectam então ele é convexo.

Apêndice A

Os Elementos de Euclides

Os *Elementos* não têm qualquer preâmbulo, começando o primeiro livro com uma lista de vinte e três definições, das quais reproduzimos algumas.

Definições.

(1) Um *ponto* ó que não tém partes.
(2) Uma *linha* é um comprimento sem largura.
(3) As extremidades de uma linha são pontos.
(4) Uma *linha reta* é uma lnha que assenta igualmente com os pontos sobre ela.
(5) Uma *superfície* ó que tém apenas comprimento e largura.
(6) As extremidades de uma superfíciesão linhas.
(7) Uma *superfície plana* é uma superfície que assenta igualmente com as linhas retas sobre ela.
(8) Um *ângulo plano* é a inclinação em relação à outra de duas linhas de um plano que se encontram e não estão sobre uma linha reta.
(9) Quando as linhas que contém o ângulo são retas, o ângulo é chamado *retilíneo*.
(10) Quando uma linha reta estabelece com uma linha reta ângulos adiacentes iguais um ao outro, cada um dos ângulos iguais é *reto*, e a linha reta encontrando a outro é chamada *perpendicular reta perpendicular* àquela a qual encontra.
(11) Um *ângulo obtuso* é um ângulo maior do que um ângulo reto.
(12) Um *ângulo agudo* é um ângulo menor do que um ângulo reto.

...

(23) Linhas retas *paralelas* são linhas retas que, estando no mesmo plano e sendo prolongadas indefinidamente em ambas as direções, não se encontram em qualquer das direções.

Em seguida, Euclides fornece uma lista de cinco postulados e cinco noções comuns. As noções comuns parecem ter sido consideradas como hipóteses aceitáveis a todas as ciências ou admissíveis por qualquer pessoa inteligente, enquanto os postulados seriam hipóteses peculaires da Geometria.

Apêndice B

Funções hiperbólicas

As funções hiperbólicas são úteis no estudo da geometria do plano hiperbólico. Lembramos que o seno hiperbólico, o cosseno hiperbólico, a tangente hiperbólica e a secante hiperbólica são definidas pelas seguintes fórmulas:

(B.1) $$\operatorname{senh}(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}, \quad \cosh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

(B.2) $$\tanh(t) = \frac{\operatorname{senh}(t)}{\cosh(t)} = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}},$$

(B.3) $$\operatorname{sech}(t) = \frac{1}{\cosh(t)} = \frac{2}{e^t + e^{-t}}.$$

Observe que o domínio de cada uma das funções acima é a reta real inteira. É fácil provar que valem as seguintes identidades para todo $t \in I\!R$:

(B.4) $$\cosh(t)^2 - \operatorname{senh}(t)^2 = 1,$$

(B.5) $$\tanh(t)^2 + \operatorname{sech}(t)^2 = 1.$$

A equação (B.4) é particolarmente sugestiva: em quanto as funções trigonométricas seno e cosseno satisfazem a relação $\cos(t)^2 + \operatorname{sen}(t)^2 = 1$, que lembra a equação do círculo $x^2 + y^2 = 1$, a relação entre as funções hiperbólicas sugere a equação de uma hipérbola $x^2 - y^2 = 1$.

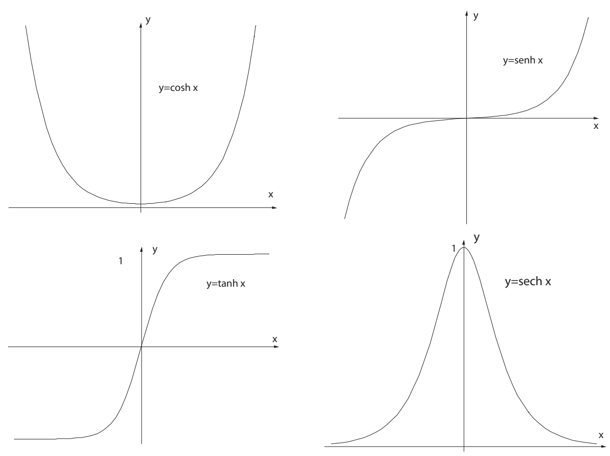

FIGURA B.1. O gráfico das funções hiperbólicas

A equação (B.5) nós diz que, para todo $t \in I\!R$, o ponto do plano cartesiano com coordenadas $\big(\tanh(t), \operatorname{sech}(t)\big)$ está no círculo unitário. Na Figura B.1 estão esboçados os gráficos das funções $y = \cosh(x)$, $y = \operatorname{senh}(x)$, $y = \tanh(x)$ e $y = \operatorname{sech}(x)$.

Referências Bibliográficas

[1] R. Courant, H. Robbins, *What is Mathematics*, Oxford University Press, 1941.

[2] R. S. Millman, G. D. Parker, *Geometry, a Metric Approach with Models*, Springer–Verlag, Undergradute Text in Mathematics, 1991.

[3] D. J. Struik, *A Concise History of Mathematics*, 4th revised edition, Dover Pubblications Inc., New York, 1987.

Índice Remissivo