MAT 2351 – Gabarito da Prova 2

03.07.2006

Prof. Paolo Piccione

Prova A

(1) $P_2(x,y) = -(x-\frac{\pi}{2})^2 + (x-\frac{\pi}{2})y + y^2$.

(2) Se existir, uma tal função f seria de classe C^2, pois as derivadas parcias dadas são de classe C^1. Daí, pelo Lema de Schwarz, seria $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$, mas $\frac{\partial}{\partial y}(3x^2 - 2xy + y^2) \neq \frac{\partial}{\partial x}(-2xy + y^2 + y)$; segue que uma tal f não existe.

(3) A função f dada é contínua, e o conjunto A dado é fechado e limitado, i.e., compacto. Pelo Teorema de Weierstrass, a função f admite máximo e mínimo em A. O único ponto crítico da f é $(0,0)$. O conjunto A é um triângulo; um estudo fácil da restrição da f aos três lados mostra que os candidatos a serem pontos de máximo e mínimo são os três vertices: $P_1 = (0,0)$, $P_2 = (1,0)$ e $P_3 = (0,-1)$. Segue: $f(P_2) = 1 = \max\limits_A f$, $f(P_1) = f(P_3) = 0 = \min\limits_A f$.

(4) A função f tem dois pontos críticos: $P = (0,0)$ e $Q = (3/4, 9/16)$. O test do Hessiano falha no ponto P. O ponto Q é um ponto de sela.

(5) Basta determinar o ponto de mínimo da função $f(x,y) = 2x^2 + y^2 + 2(3-2x+y)^2$, dado por $(-6/7, 6/7)$. O ponto desejado no plano é $(-6/7, 6/7, 3/7)$.

Prova B

(1) $P_2(x,y) = -(x-\frac{\pi}{2})^2 + (x-\frac{\pi}{2})y - y^2$.

(2) Se existir, uma tal função f seria de classe C^2, pois as derivadas parcias dadas são de classe C^1. Daí, pelo Lema de Schwarz, seria $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$, mas $\frac{\partial}{\partial y}(3x^2 - 2xy + y^2) \neq \frac{\partial}{\partial x}(-2xy + y^2 + y)$; segue que uma tal f não existe.

(3) A função f dada é contínua, e o conjunto A dado é fechado e limitado, i.e., compacto. Pelo Teorema de Weierstrass, a função f admite máximo e mínimo em A. O único ponto crítico da f é $(0,0)$. O conjunto A é um triângulo; um estudo fácil da restrição da f aos três lados mostra que os candidatos a serem pontos de máximo e mínimo são os três vertices: $P_1 = (0,0)$, $P_2 = (0,1)$ e $P_3 = (-1,0)$. Segue: $f(P_2) = 1 = \max\limits_A f$, $f(P_1) = f(P_3) = 0 = \min\limits_A f$.

(4) A função f tem dois pontos críticos: $P = (0,0)$ e $Q = (9/16, 3/4)$. O test do Hessiano falha no ponto P. O ponto Q é um ponto de sela.

(5) Basta determinar o ponto de mínimo da função $f(x,y) = 2y^2 + x^2 + 2(3-2y+x)^2$, dado por $(6/7, -6/7)$. O ponto desejado no plano é $(6/7, -6/7, 3/7)$.

Prova C

(1) $P_2(x,y) = x^2 + (y-\frac{\pi}{2})x - (y-\frac{\pi}{2})^2$.

(2) Se existir, uma tal função f seria de classe C^2, pois as derivadas parcias dadas são de classe C^1. Daí, pelo Lema de Schwarz, seria $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$, mas $\frac{\partial}{\partial y}(3x^2 - 2xy + y^2) \neq \frac{\partial}{\partial x}(-2xy + y^2 + y)$; segue que uma tal f não existe.

(3) A função f dada é contínua, e o conjunto A dado é fechado e limitado, i.e., compacto. Pelo Teorema de Weierstrass, a função f admite máximo e mínimo em A. O único ponto crítico da f é $(0,0)$. O conjunto A é um triângulo; um estudo fácil da restrição da f aos três lados mostra que os candidatos a serem pontos de máximo e mínimo são os três vertices: $P_1 = (0,0)$, $P_2 = (1,0)$ e $P_3 = (0,-1)$. Segue: $f(P_2) = -1 = \min\limits_A f$, $f(P_1) = f(P_3) = 0 = \max\limits_A f$.

(4) A função f tem dois pontos críticos: $P = (0,0)$ e $Q = (3/4, 9/16)$. O test do Hessiano falha no ponto P. O ponto Q é um ponto de sela.

(5) Basta determinar o ponto de mínimo da função $f(x,y) = x^2 + 2y^2 + 2(3 - x + y)^2$, dado por $(3/2, -3/4)$. O ponto desejado no plano é $(3/2, -3/4, 3/4)$.

Prova D

(1) $P_2(x,y) = -x^2 + x(y - \frac{\pi}{2}) + (y - \frac{\pi}{2})^2$.

(2) Se existir, uma tal função f seria de classe C^2, pois as derivadas parcias dadas são de classe C^1. Daí, pelo Lema de Schwarz, seria $\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}$, mas $\frac{\partial}{\partial y}(3x^2 - 2xy + y^2) \neq \frac{\partial}{\partial x}(-2xy + y^2 + y)$; segue que uma tal f não existe.

(3) A função f dada é contínua, e o conjunto A dado é fechado e limitado, i.e., compacto. Pelo Teorema de Weierstrass, a função f admite máximo e mínimo em A. O único ponto crítico da f é $(0,0)$. O conjunto A é um triângulo; um estudo fácil da restrição da f aos três lados mostra que os candidatos a serem pontos de máximo e mínimo são os três vertices: $P_1 = (-1,0)$, $P_2 = (0,1)$ e $P_3 = (0,0)$. Segue: $f(P_1) = -1 = \min_A f$, $f(P_2) = f(P_3) = 0 = \max_A f$.

(4) A função f tem dois pontos críticos: $P = (0,0)$ e $Q = (3/4, 9/16)$. O test do Hessiano falha no ponto P. O ponto Q é um ponto de sela.

(5) Basta determinar o ponto de mínimo da função $f(x,y) = x^2 + y^2 + 2(3 + x - y)^2$, dado por $(-6/5, 6/5)$. O ponto desejado no plano é $(-6/5, 6/5, 3/5)$.
