Gabarito - Lista de Exercícios III

April 14, 2012

1. Calcule os limites das funções se existirem:

   (a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 5x}{\tan 3x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 5x}{\cos 5x}}{\frac{\sin 3x}{\cos 3x}} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 3x}\cdot\frac{\cos 3x}{\cos 5x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{5x\sin 5x}{5x}\cdot\frac{3x}{3x\sin 3x}\cdot\frac{\cos 3x}{\cos 5x} = \frac{5}{3}$

   (b) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^3+2x^2-1}{5-3x} = \frac{(-2)^3+2(-2)^2-1}{5-3(-2)} = -\frac{1}{11}$

   (c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}\cdot\frac{\sqrt{t^2+9}+3}{\sqrt{t^2+9}+3} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{t^2+9-9}{t^2\left(\sqrt{t^2+9}+3\right)} = \frac{1}{6}$

   (d) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}{(x-1)(x+1)} = \frac{3}{2}$

   (e) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2} = \frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)^x\cdot\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}{\left(1+\frac{3}{x}\right)^x\cdot\left(1+\frac{3}{x}\right)^2} = \frac{e^{-1}}{e^3} = e^{-4}$

   (f) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{3x+5}-2}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{3x+5}-2}{x^2-1}\cdot\frac{\left(\sqrt[3]{(3x+5)^2}+2\sqrt[3]{3x+5}+4\right)}{\left(\sqrt[3]{(3x+5)^2}+2\sqrt[3]{3x+5}+4\right)} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{3x+5-8}{(x^2-1)\left(\sqrt[3]{(3x+5)^2}+2\sqrt[3]{3x+5}+4\right)} =$ $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3(x-1)}{(x-1)(x+1)\left(\sqrt[3]{(3x+5)^2}+2\sqrt[3]{3x+5}+4\right)} = \frac{1}{8}$

2. Em ambos os casos, temos uma função que vai a zero vezes uma que é limitada, portanto ambos os limites são nulos.

3. Aqui também os dois casos são iguais, basta observar que $f(x)$ é limitada e ambos os limites tem o mesmo limite, portanto f também tem.

4. $g(3) = 6$

5. Tenta achar uma mudança de variável adequada.

   (a) Basta fazer $\frac{x}{n} = \frac{1}{u}$, então: $\lim\limits_{n\to +\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \lim\limits_{u\to +\infty}\left[\left(1+\frac{1}{u}\right)^u\right]^x = \left[\lim\limits_{u\to +\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^u\right]^x e^x$

   (b) Basta fazer $x = \frac{1}{n}$, então: $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{n\to 0}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

   (c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(x+\Delta x)-\ln x}{\Delta x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \lim\limits_{x\to 0}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}} = \ln\left(\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}\right) =$ $\ln e^{x^{-1}} = \frac{1}{x}$

6. Usando a sugestão temos: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x}\cdot\frac{(\cos(x)+1)}{(\cos(x)+1)} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos^2(x)-1}{x(\cos(x)+1)} =$ $\lim\limits_{x\to 0}-\sin x\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{(\cos(x)+1)} = \lim\limits_{x\to 0}-\sin x\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{(\cos(x)+1)} = 0\cdot 1\cdot\frac{1}{2} = 0$ e assim:

(a) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x+\Delta x)-\cos(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\cos x(\cos \Delta x - 1) - \sin(x)\sin \Delta x}{\Delta x} = \cos x \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{(\cos \Delta x - 1)}{\Delta x} - \sin x \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} = -\sin x$

(b) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x)-\sin(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\sin x(\cos \Delta x - 1) + \cos x \sin \Delta x}{\Delta x} = \sin x \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{(\cos \Delta x - 1)}{\Delta x} + \cos x \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} = \cos x$

7. Para $v \to 0$ temos $\lim\limits_{v \to 0} \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = m_0 \lim\limits_{v \to 0} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = m_0$ como esperávamos, pois a partícula está em repouso e m_0 é a massa de repouso dela. Para $v \to c$ temos, $\lim\limits_{v \to \infty} \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = m_0 \lim\limits_{v \to \infty} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = +\infty$, ou seja, uma partícula de massa m_0 nunca consegue alcançar a velocidade da luz, pois sua massa fica cada vez maior e então é necessário uma energia cada vez maior para dar mais velocidade a ela.