Gabarito Lista II

April 14, 2012

1. Para calcular o limite das sequências, basta observar o comportamento do a_n quando n é muito grande, ou seja, tomar $\lim_{n\to+\infty} a_n$:

   (a) $\sin x$ é uma função limitada e $\sin^2 x$ também, e como $\frac{1}{\log x}$ vai a zero para $x \to +\infty$ então, $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

   (b) Antes vamos mostrar que $\frac{\ln x}{x} \to 0$ quando $x \to +\infty$. Para $x > 1$ vale $0 < \ln x < x$ e portanto $0 < \frac{\ln x}{x} < 1$ e usando $\ln x = 2\ln\sqrt{x}$ temos $0 < \frac{2\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{x}} < \frac{2}{\sqrt{x}}$, como $\frac{1}{\sqrt{x}} \to 0$ pelo teorema do confronto temos que $\frac{\ln x}{x}$ também vai a zero. Então $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = e^{\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n}} = e^0 = 1$.

   (c) $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n}{2n\left(1-\frac{1}{2n}\right)} = 1$

   (d) $n! \leq n^n$ então $0 < \frac{n!}{n^n} \leq 1$ e pode-se constatar que $\frac{n!}{n^n} \leq \frac{1}{n}$. Como $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ então $\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$.

   (e) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n\left(17+\frac{23}{n}\right)}{n^2\left(\frac{2}{n^2}-1\right)} = 0$

   (f) $a_n = \frac{n\sin n!}{n^2+1}$ $\lim_{n\to+\infty} \frac{n\sin n!}{n^2+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n\sin n!}{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = 0$, pois $\frac{1}{n}$ vai a zero e $\sin x$ é limitada.

   (g) $\lim_{n\to+\infty} = \left(\frac{5}{3}\right)^n \frac{1+\frac{1}{5^n}}{1+\frac{2}{3^n}} = +\infty$.

2. Usando as regras de limite e resultados como o Teorema do Confronto, temos:

   (a) $\lim_{x\to-1} \sqrt[3]{\frac{x^3+1}{x+1}} = \lim_{x\to-1} \sqrt[3]{\frac{x+1(x^2-x+1)}{x+1}} = \sqrt[3]{3}$

   (b) $\lim_{x\to1} \frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x^2-1} = \lim_{x\to1} \frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x^2-1} \cdot \frac{\sqrt{x^2+3}+2}{\sqrt{x^2+3}+2} = \lim_{x\to1} \frac{x^2-1}{x^2-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+3}+2} = \frac{1}{4}$

   (c) $\lim_{x\to+\infty} x\sin\frac{1}{x} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to0} \frac{\sin y}{y} = 1$ pelo limite fundamental e onde $y = \frac{1}{x}$.

   (d) $\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{2}{x}\right)^x = \lim_{y\to+\infty} \left(1+\frac{1}{y}\right)^{2y} = \lim_{y\to+\infty} \left[\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\right]^2 = e^2$, onde $x = 2y$.

   (e) $\lim_{x\to0} (1+x)^{\frac{3}{x}} = \lim_{y\to+\infty} \left[\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\right]^3 = e^3$, com $y = \frac{1}{x}$

   (f) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{2x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{2x\left(1+\frac{1}{2x}\right)} = \frac{1}{2}$

(g) $\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$, pois $\sin x$ é limitada.

(h) $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2} = \lim_{x\to +\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)^x\cdot\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}{\left(1+\frac{3}{x}\right)^x\cdot\left(1+\frac{3}{x}\right)^2} = \frac{1}{e}\cdot\frac{1}{e^3} = e^{-4}$

(i) $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin(\pi x)} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\pi\sin(\pi x)}{\pi x}} = \frac{1}{\pi}$

(j) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 3x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{5\sin 5x}{5x}}{\frac{3\sin 3x}{3x}} = \frac{5}{3}$

(k) $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x^2+x-1}{x^3-2x+7}\right) = \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x^2\left(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{x^3\left(1-\frac{2}{x^2}+\frac{7}{x^3}\right)}\right) = 0$

(l) $\lim_{x\to +\infty} x^x = \lim_{x\to +\infty} e^{x\ln x} = +\infty$

(m) $\lim_{x\to 2}\frac{\left(x^2-5x+6\right)(x+1)}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-3)(x+1)}{x-2} = -3$

(n) $\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{y}{\sin y} = 1$, com $x = \sin y$

(o) $\lim_{x\to \pi}\frac{x^2-\pi^2}{x-\pi} = \lim_{x\to \pi}\frac{(x-\pi)(x+\pi)}{x-\pi} = 2\pi$

(p) $\lim_{x\to p}\frac{\sin\left(x^2-p^2\right)}{x-p} = \lim_{x\to p}\frac{\sin\left(x^2-p^2\right)}{x-p}\cdot\frac{x+p}{x+p} = 2p$

3. Seguindo como no exercício 2, temos:

(a) $\lim_{x\to 1}\frac{f(7x)}{3x} = \lim_{x\to 0}\frac{7\cdot f(7x)}{3\cdot 7x} = \frac{7}{3}$

(b) $\lim_{x\to 1}\frac{f(x^2-1)}{x-1} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x^2-1)}{x^2-1}\cdot(x+1) = 2$